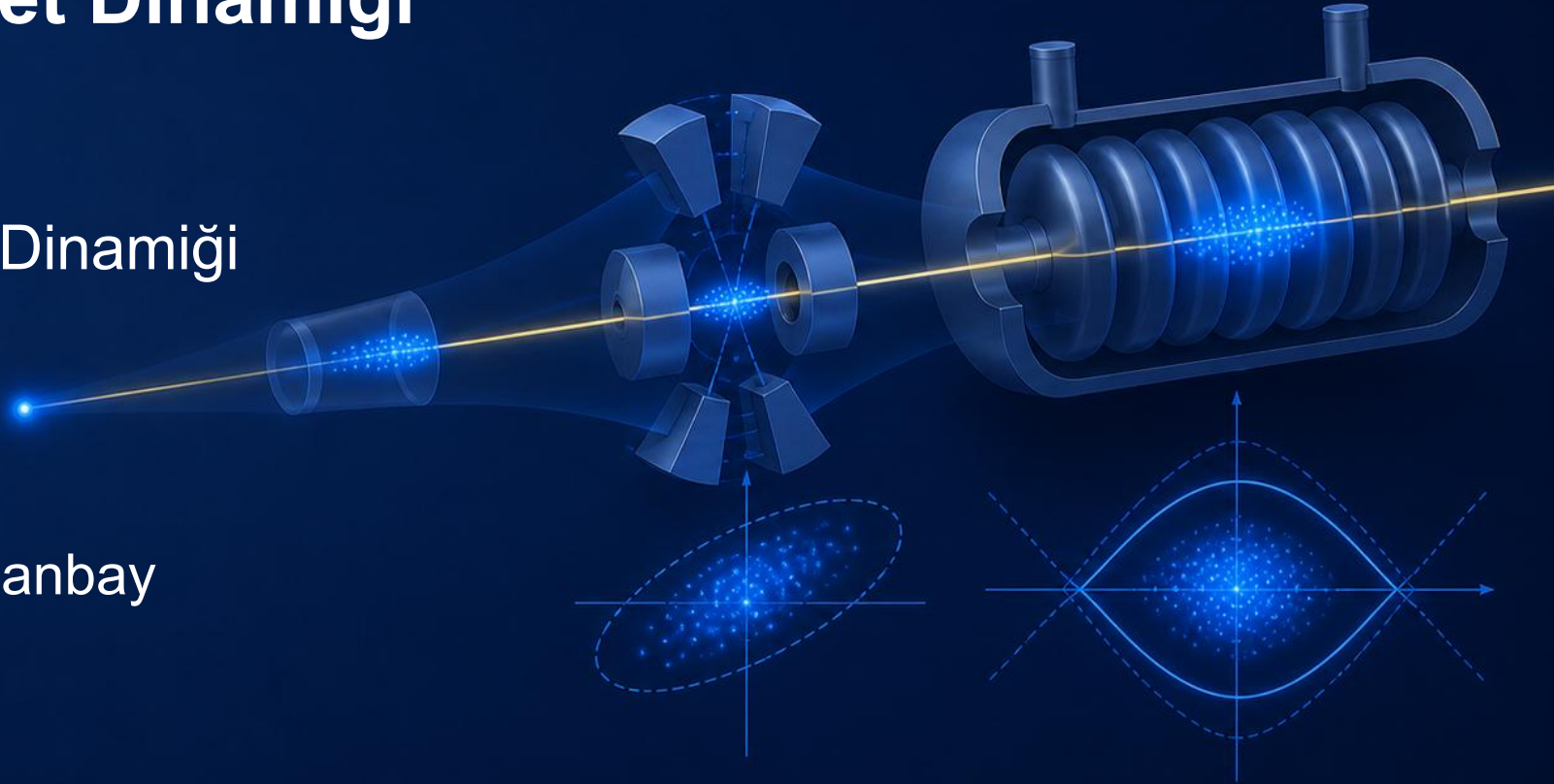


Parçacık Optiği ve Demet Dinamiği

2. Ders

Enine ve Boyuna Demet Dinamiği

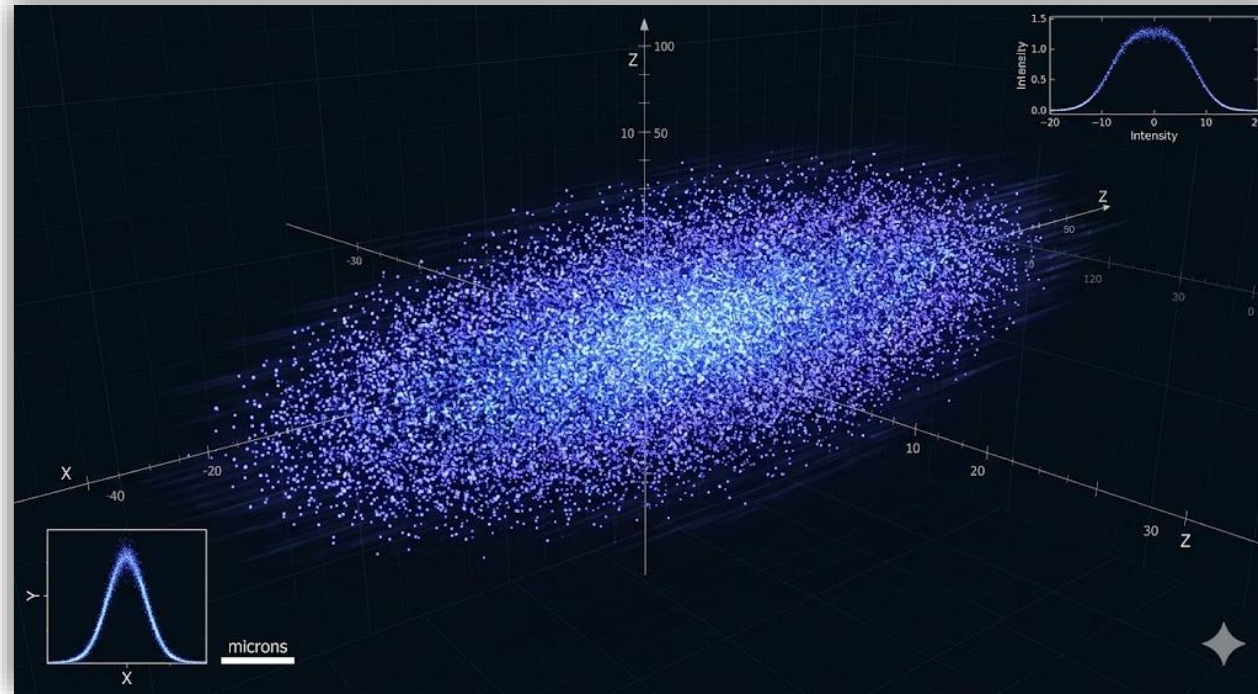
Dr. Öğr. Üyesi Ali Can Canbay
Ankara Üniversitesi



Parçacık Demeti

Parçacık demeti, bir hızlandırıcı veya demet hattı boyunca ortak bir referans yörünge çevresinde ilerleyen çok sayıda yüklü parçacığın oluşturduğu topluluktur.

Demetteki parçacıklar aynı konuma, hareket yönüne ve enerjiye sahip değildir. Parçacıkların durumları, referans parçacığın durumu çevresinde sonlu bir dağılım oluşturur.



Enine Demet Profili

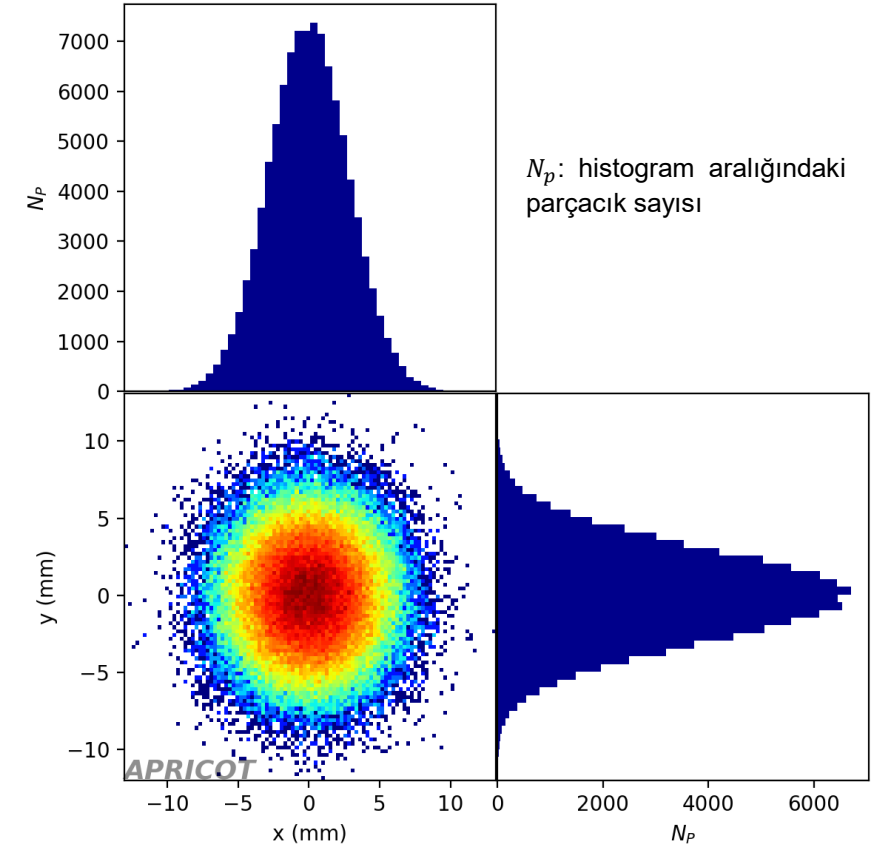
Demet hattının seçilen bir kesitinde parçacıkların yatay ve düşey konumları, iki boyutlu enine parçacık yoğunluğu $\rho(x,y)$ ile betimlenir. Yoğunluk haritasında sıcak renkler daha yüksek, soğuk renkler daha düşük parçacık yoğunluğunu gösterir.

İki boyutlu dağılımın eksenler üzerindeki izdüşümleri, bir boyutlu yatay ve düşey demet profillerini verir:

$$P_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,y) dy$$

$$P_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,y) dx$$

Burada x yatay konumu, y düşey konumu, $\rho(x,y)$ iki boyutlu parçacık yoğunluğunu; $P_x(x)$ ve $P_y(y)$ ise sırasıyla yatay ve düşey demet profillerini göstermektedir.



Demet profilleri parçacıkların konum dağılımını gösterir; parçacıkların hareket yönlerini doğrudan içermez.

Demet Merkezi ve RMS Demet Boyutu

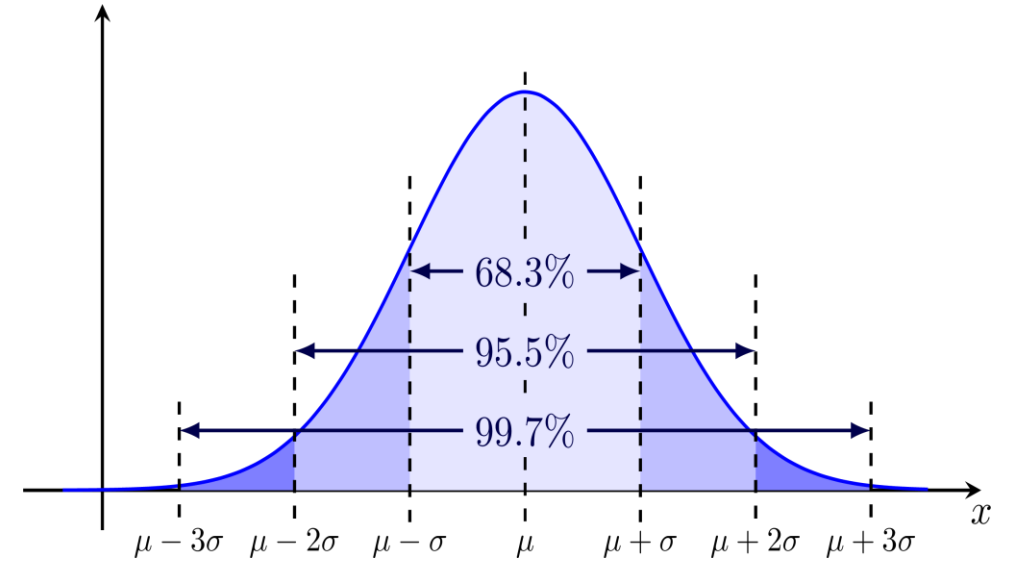
Demet profilinin merkezi, parçacık konumlarının ortalamasıyla belirlenir. RMS (root mean square - kök kare ortalama) demet boyutu ise parçacıkların bu merkez çevresindeki yayılımını nicel olarak tanımlar.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

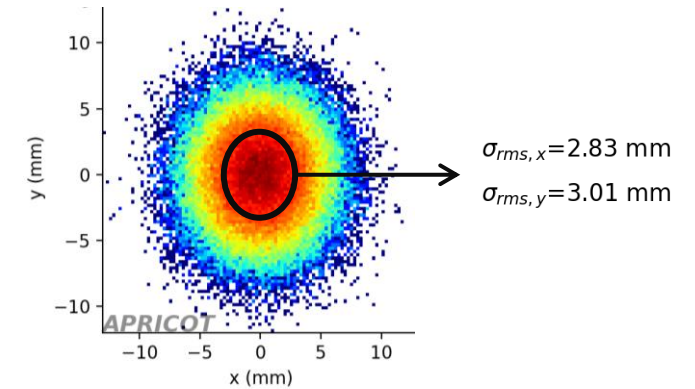
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}$$

Burada N toplam parçacık sayısını; x_i ve y_i , i . parçacığın yatay ve düşey konumlarını; $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ demet merkezini; σ_x ve σ_y yatay ve düşey RMS demet boyutlarını göstermektedir.

RMS demet boyutu, demetin kesin dış sınırı değil, parçacıkların merkez çevresindeki istatistiksel yayılımıdır.



Bir boyutlu Gauss profilinde μ ortalama, σ RMS genişliktir; parçacıkların yaklaşık %68,3'ü $\mu - \sigma$ ile $\mu + \sigma$ arasındadır.



Konum Profili Neden Yeterli Değil?

Bir konum profili, seçilen kesitteki x_i değerlerinin dağılımını gösterir. Ancak aynı x_i dağılımı, birbirinden farklı x'_i dağılımlarıyla birlikte bulunabilir.

Aynı başlangıç konumlarına sahip iki demet ele alalım:

$$x_{i,A} = x_{i,B} = x_i$$

Demet A'daki parçacıklar paralel, Demet B'deki parçacıkların yörünge eğimleri ise konumlarıyla orantılı olsun:

$$x'_{i,A} = 0, \quad x'_{i,B} = kx_i$$

Burada k , demet konumu ile yörünge eğimi arasındaki orantı katsayısıdır. $k > 0$ demetin genişlemesine, $k < 0$ ise uygun sürüklenme uzunluğunda daralmasına karşılık gelir.

Sürüklenme bölgesinin sonunda:

$$x_{i,A}(L) = x_i + Lx'_{i,A} = x_i$$

$$x_{i,B}(L) = x_i + Lx'_{i,B} = x_i + Lkx_i = (1 + kL)x_i$$

Buna bağlı olarak RMS demet boyutları:

$$\sigma_{x,A}(L) = \sigma_{x,0}$$

$$\sigma_{x,B}(L) = |1 + kL|\sigma_{x,0}$$

İki demetin başlangıç konum profilleri ve RMS boyutları aynı olmasına rağmen sonraki profilleri farklıdır. Demetin gelecekteki dağılımını belirlemek için x ve x' birlikte bilinmelidir.

Enine Faz Uzayı

Birinci derste tanımlanan enine durum vektörü, referans yörüngenin belirli bir s konumundaki tek parçacığı (x, x') düzleminde bir nokta olarak temsil eder. Demetteki parçacıklar farklı durum vektörlerine sahip olduğundan, N parçacıklı bir demet aynı düzlemde N noktanın oluşturduğu bir dağılımla gösterilir.

$$\mathcal{U}_x(s) = \{\mathbf{u}_i(s) \mid i = 1, \dots, N\}, \quad \mathbf{u}_i(s) = \begin{bmatrix} x_i(s) \\ x'_i(s) \end{bmatrix}$$

Bu nokta dağılımı, enine faz uzayı yoğunluğu $f_x(x, x'; s)$ ile betimlenir. Faz uzayındaki her nokta, bir parçacığın aynı s konumundaki yatay konumunu ve yörünge eğimini birlikte gösterir.

Yatay demet profili, faz uzayı yoğunluğunun bütün x' değerleri üzerinden toplanmasıyla elde edilir:

$$P_x(x; s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x, x'; s) dx'$$

Konum profili faz uzayı dağılımının yalnızca bir izdüşümüdür; demetin taşınımını belirleyen tüm bilgiyi içermez.

Faz Uzayında Parçacık Dağılımı

Faz uzayı dağılımının yatay eksenindeki genişliği parçacıkların konum yayılımını, düşey eksenindeki genişliği ise yörünge eğimlerinin yayılımını gösterir. Dağılımın yönelimi, parçacık konumları ile yörünge eğimleri arasındaki ilişkiyi ortaya koyar.

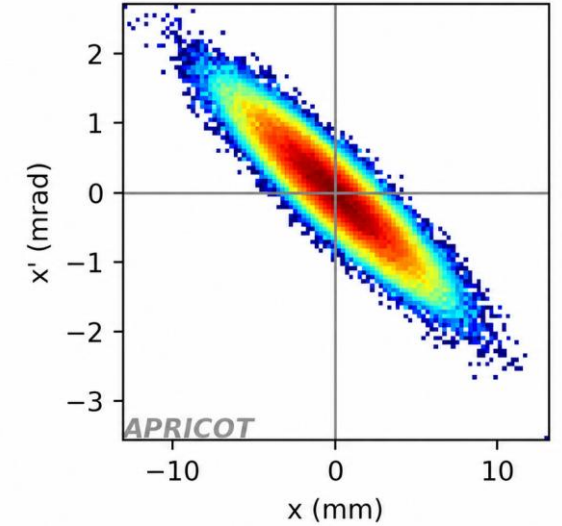
Parçacığın referans yörüngeden uzaklaşıp uzaklaşmadığı, x ile x' değerlerinin işaretlerinden belirlenebilir:

$xx' > 0 \Rightarrow$ parçacık referans yörüngeden uzaklaşır

$xx' < 0 \Rightarrow$ parçacık referans yörüngeye yaklaşır

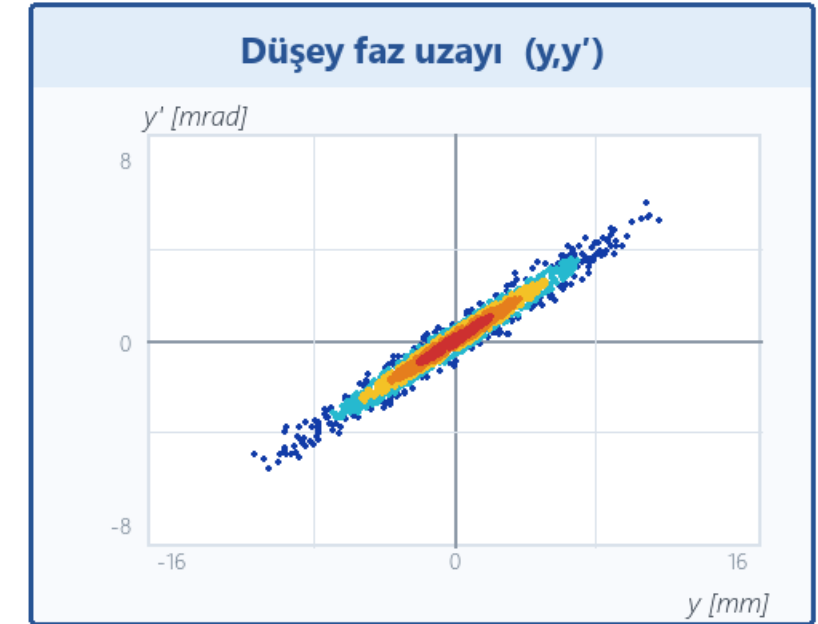
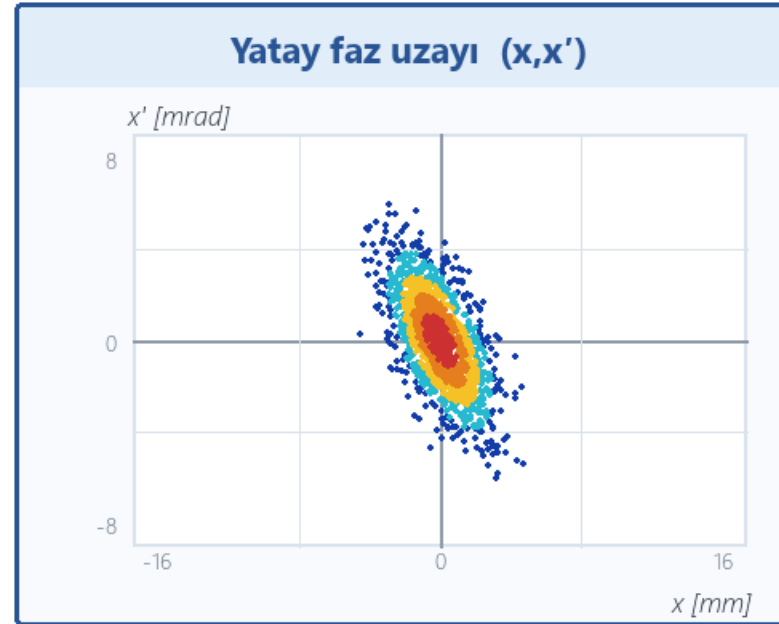
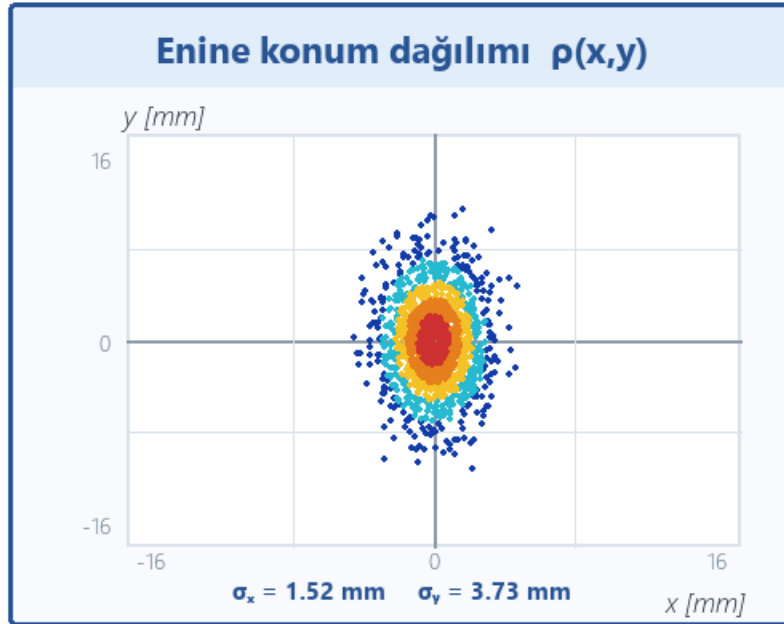
Bu nedenle:

- Birinci ve üçüncü bölgelerdeki parçacıklar demetin genişlemesine katkıda bulunur.
- İkinci ve dördüncü bölgelerdeki parçacıklar demetin daralmasına katkıda bulunur.



Sola eğimli bir (x, x') dağılımında x ile x' çoğunlukla zıt işaretlidir; demet ilerledikçe odaklanma eğilimindedir.

Aynı Demetin Profil ve Faz Uzayındaki Değişimi



Hill Denkleminin Genlik–Faz Çözümü

Hill denkleminin kararlı çözümünde salınımın genliği ve fazı, demet hattı boyunca değişebilir. Bu nedenle çözüm:

$$x(s) = A w(s) \cos [\psi(s) + \phi]$$

biçiminde yazılır. Burada A ve ϕ başlangıç koşullarıyla belirlenen sabitleri, $w(s)$ konuma bağlı genlik fonksiyonunu, $\psi(s)$ ise fazı göstermektedir.

$\Theta(s) = \psi(s) + \phi$ tanımlanarak çözüm Hill denklemine yerleştirilirse:

$$x''(s) + K(s)x(s) = A \left[w''(s) + K(s)w(s) - w(s)(\psi'(s))^2 \right] \cos \Theta(s) - A[2w'(s)\psi'(s) + w(s)\psi''(s)] \sin \Theta(s) = 0$$

Bu bağıntının her $\Theta(s)$ değeri için sağlanabilmesi için sinüs ve kosinüs terimlerinin katsayıları ayrı ayrı sıfır olmalıdır:

$$w''(s) + K(s)w(s) - w(s)(\psi'(s))^2 = 0$$

$$2w'(s)\psi'(s) + w(s)\psi''(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad [w^2(s)\psi'(s)]' = 0$$

Beta Fonksiyonu ve Courant–Snyder Çözümü

$$[w^2(s)\psi'(s)]' = 0$$

bağıntısı, $w^2(s)\psi'(s)$ çarpımının sabit olduğunu gösterir. Genlik fonksiyonunun normalizasyonu bu sabit 1 olacak biçimde seçildiğinde:

$$w^2(s)\psi'(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad \psi'(s) = \frac{1}{w^2(s)}$$

Bu sonuç diğer diferansiyel denklemde kullanılırsa:

$$w''(s) + K(s)w(s) = \frac{1}{w^3(s)}$$

Beta fonksiyonu

$$\beta(s) \equiv w^2(s)$$

olarak tanımlandığında:

$$\psi'(s) = \frac{1}{\beta(s)} \quad , \quad \Delta\psi = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\beta(s)}$$

Başlangıç genliğinin karesi

$$\varepsilon \equiv A^2$$

ile gösterildiğinde parçacık konumu:

$$x(s) = \sqrt{\varepsilon\beta(s)} \cos \Theta(s)$$

biçiminde yazılır. Bu ifadenin s değişkenine göre türevi:

$$x'(s) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta(s)}} \left[\frac{\beta'(s)}{2} \cos \Theta(s) - \sin \Theta(s) \right]$$

olur.

Alpha fonksiyonu: $\alpha(s) \equiv -\frac{1}{2}\beta'(s)$

$$x'(s) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta(s)}} [\alpha(s) \cos \Theta(s) + \sin \Theta(s)]$$

$\beta(s)$ salınımın konuma bağlı genlik ölçeğini, $\alpha(s)$ ise bu ölçeğin demet hattı boyunca değişimini gösterir.

Courant–Snyder Değişmezi

Elde edilen $x(s)$ ve $x'(s)$ çözümleri kullanılarak $\Theta(s)$ faz değişkeni denklemlerden çıkarılabilir.

Konum çözümünden:

$$\cos \Theta(s) = \frac{x(s)}{\sqrt{\varepsilon \beta(s)}}$$

Yörünge eğimine ilişkin çözüm yeniden düzenlendiğinde:

$$\sin \Theta(s) = -\frac{\alpha(s)x(s) + \beta(s)x'(s)}{\sqrt{\varepsilon \beta(s)}}$$

$$\cos^2 \Theta(s) + \sin^2 \Theta(s) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x^2(s)}{\varepsilon \beta(s)} + \frac{[\alpha(s)x(s) + \beta(s)x'(s)]^2}{\varepsilon \beta(s)} = 1$$

olur. Terimler açıldığında:

$$\frac{1 + \alpha^2(s)}{\beta(s)} x^2(s) + 2\alpha(s)x(s)x'(s) + \beta(s)x'^2(s) = \varepsilon$$

Gama Fonksiyonu: $\gamma(s) \equiv \frac{1 + \alpha^2(s)}{\beta(s)}$

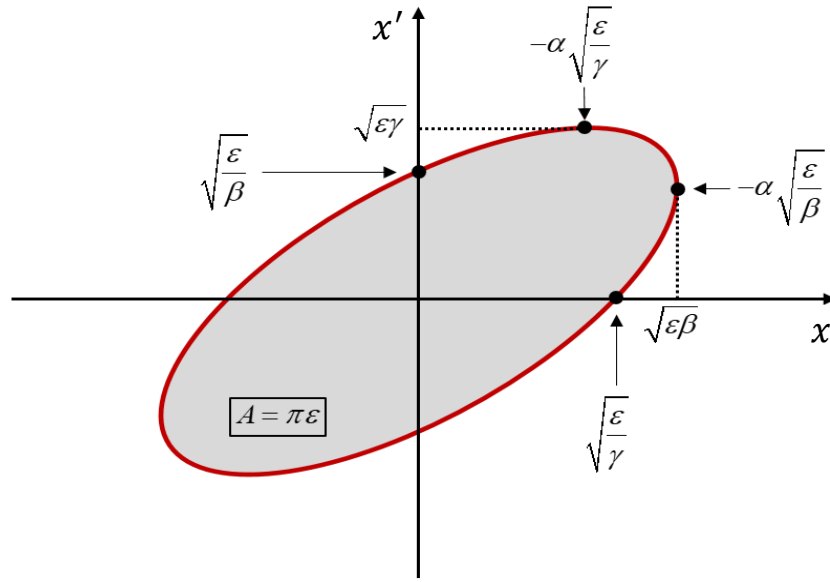
$$\gamma(s)x^2(s) + 2\alpha(s)x(s)x'(s) + \beta(s)x'^2(s) = \varepsilon$$

$$\boxed{\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \varepsilon}$$

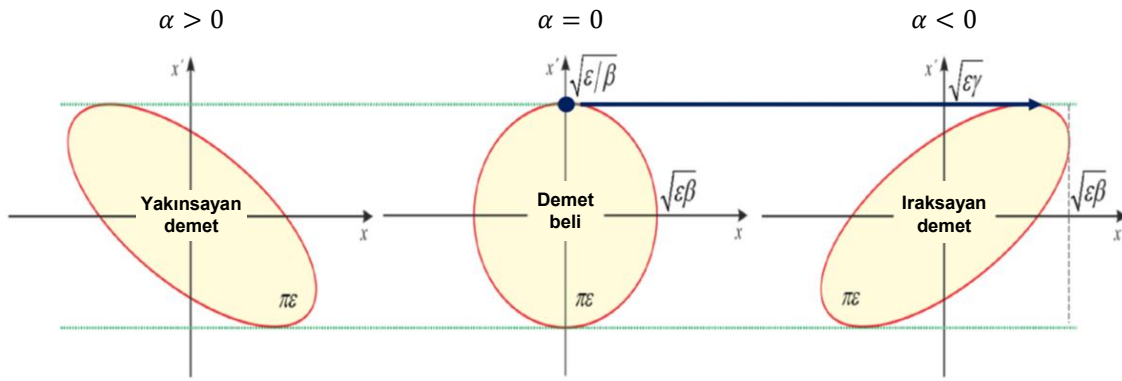
$\alpha(s)$, $\beta(s)$ ve $\gamma(s)$ Twiss parametreleri olarak adlandırılır. Bu parametreler demet hattı boyunca değişse de aynı parçacık için ε sabit kalır. Bu sabit, Courant–Snyder değişmezi olarak adlandırılır.

$\beta(s)\gamma(s) - \alpha^2(s) = 1$ olduğundan üç Twiss parametresinden yalnızca ikisi bağımsızdır.

Twiss Parametrelerinin Geometrik Anlamı



[W. Hillert, Transverse Linear Beam Dynamics](#)



$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \epsilon$$

$$x_{\max} = \sqrt{\epsilon\beta}, \quad x'_{\max} = \sqrt{\epsilon\gamma}, \quad A_{\text{elips}} = \pi\epsilon$$

- β elipsin x doğrultusundaki genişliği belirler.
- γ elipsin x' doğrultusundaki genişliğini belirler.
- α elipsin yönelimini belirler.
- ϵ elipsin büyüklüğünü ve alanını belirler.

$$\alpha(s) = -\frac{1}{2}\beta'(s), \quad x_{\max}(s) = \sqrt{\epsilon\beta(s)} \Rightarrow$$

$$\frac{dx_{\max}}{ds} = -\alpha(s) \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta(s)}}$$

- $\alpha > 0$ ise demet daralır.
- $\alpha = 0$ ise demet genişliği bir ekstremumdan geçer.
- $\alpha < 0$ ise demet genişler.

Faz Uzayı Dağılımının Merkezi ve Yayılımı

Courant–Snyder elipsi tek bir parçacığın hareketini betimler. Bir demeti betimlemek için aynı kesitteki bütün parçacıkların faz uzayındaki dağılımı ele alınır.

Dağılımın merkezi:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \bar{x}' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x'_i$$

Parçacıkların dağılım merkezinden sapmaları:

$$\tilde{x}_i = x_i - \bar{x}, \quad \tilde{x}'_i = x'_i - \bar{x}'$$

Konum ve yörünge eğimi yayılımları:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i^2, \quad \sigma_{x'}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{x}'_i^2$$

Konum ile yörünge eğiminin birlikte değişimi:

$$\sigma_{xx'} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i \tilde{x}'_i$$

Burada σ_x konumların RMS yayılımını, $\sigma_{x'}$ yörünge eğimlerinin RMS yayılımını ve $\sigma_{xx'}$ konum ile yörünge eğimi arasındaki kovaryansı gösterir.

Demetin Kovaryans Matrisi ve RMS Emitansı

Bir demetin faz uzayındaki dağılımını tanımlamak için parçacıkların konum ve yörünge eğimi doğrultularındaki yayılımları ile bu iki değişken arasındaki ilişki birlikte değerlendirilmelidir. Kovaryans matrisi, bu bilgileri tek bir yapıda toplar.

Yatay faz düzleminin kovaryans matrisi:

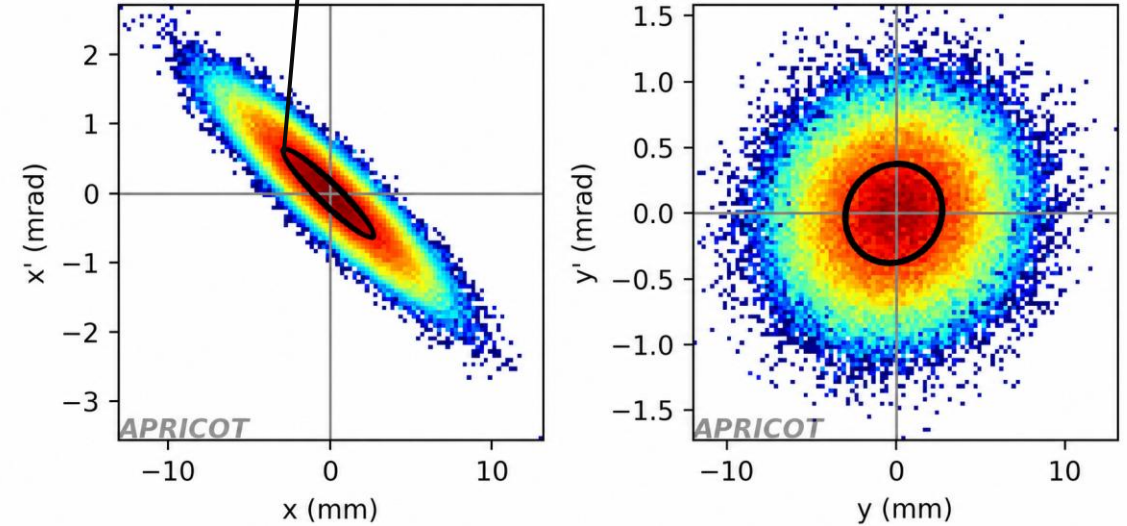
$$\Sigma_x = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xx'} \\ \sigma_{xx'} & \sigma_{x'}^2 \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanır. Köşegen elemanlar dağılımın konum ve yörünge eğimi doğrultularındaki yayılımlarını, köşegen dışındaki elemanlar ise bu iki değişken arasındaki ilişkiyi gösterir.

Σ_x , parçacık koordinatlarını bir kesitten diğerine taşıyan bir taşıma matrisi değildir; demetin seçilen bir kesitteki faz uzayı dağılımını istatistiksel olarak betimler. Taşıma matrisiyle birlikte kullanıldığında, demetin RMS boyutunun ve faz uzayındaki yöneliminin demet hattı boyunca nasıl değiştiğinin hesaplanmasını sağlar.

Demetin yatay RMS emitansı, kovaryans matrisinin determinantıyla tanımlanır:

$$\varepsilon_{\text{rms},x} = \sqrt{\det \Sigma_x} = \sqrt{\sigma_x^2 \sigma_{x'}^2 - \sigma_{xx'}^2}$$



RMS emitans, demetin faz uzayında kapladığı alanın istatistiksel ölçeğini gösterir.

Tek Parçacık Çözümünden Demet Yayılımlarına

Courant–Snyder çözümüne göre i . parçacığın konumu ve yörünge eğimi:

$$x_i = \sqrt{\varepsilon_i \beta} \cos \Theta_i, \quad x'_i = -\sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\beta}} (\alpha \cos \Theta_i + \sin \Theta_i)$$

biçimindedir.

Demet merkezi referans yörüngesi üzerinde bulunuyorsa, parçacıkların salınım fazları düzgün dağılıyorsa ve ε_i ile Θ_i birbirinden bağımsızsa:

$$\langle \cos^2 \Theta \rangle = \langle \sin^2 \Theta \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \sin \Theta \cos \Theta \rangle = 0$$

$$\varepsilon_{\text{rms},x} \equiv \frac{\langle \varepsilon_i \rangle}{2} \Rightarrow \boxed{\sigma_x^2 = \varepsilon_{\text{rms},x} \beta, \quad \sigma_{x'}^2 = \varepsilon_{\text{rms},x} \gamma, \quad \sigma_{xx'} = -\varepsilon_{\text{rms},x} \alpha} \Rightarrow \boxed{\Sigma_x = \varepsilon_{\text{rms},x} \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix}}$$

Konum yayılımı:

$$\sigma_x^2 = \langle x_i^2 \rangle = \beta \langle \varepsilon_i \cos^2 \Theta_i \rangle = \frac{\langle \varepsilon_i \rangle}{2} \beta$$

Yörünge eğimi yayılımı:

$$\sigma_{x'}^2 = \langle x_i'^2 \rangle = \frac{\langle \varepsilon_i \rangle}{2\beta} (1 + \alpha^2) = \frac{\langle \varepsilon_i \rangle}{2} \gamma$$

Konum–eğim kovaryansı:

$$\sigma_{xx'} = \langle x_i x'_i \rangle = -\frac{\langle \varepsilon_i \rangle}{2} \alpha$$

Kovaryans Matrisinin Taşınımı

Doğrusal bir demet hattında aynı taşıma matrisi demetteki bütün parçacıklara uygulanır:

$$\mathbf{u}_{i,2} = M\mathbf{u}_{i,1}$$

Demet merkezinin durum vektörü de aynı matrisle taşınır:

$$\bar{\mathbf{u}}_2 = M\bar{\mathbf{u}}_1$$

Buna göre i . parçacığın demet merkezinden sapması:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_{i,2} &= \mathbf{u}_{i,2} - \bar{\mathbf{u}}_2 \\ &= M\mathbf{u}_{i,1} - M\bar{\mathbf{u}}_1 \\ &= M\tilde{\mathbf{u}}_{i,1}\end{aligned}$$

$$\Sigma_{x,2} = M\Sigma_{x,1}M^T$$

Çıkış kesitindeki kovaryans matrisi:

$$\Sigma_{x,2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{\mathbf{u}}_{i,2} \tilde{\mathbf{u}}_{i,2}^T$$

biçiminde tanımlanır. Sapma vektörünün taşınım bağıntısı kullanılırsa:

$$\begin{aligned}\Sigma_{x,2} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (M\tilde{\mathbf{u}}_{i,1}) (M\tilde{\mathbf{u}}_{i,1})^T \\ &= M \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{\mathbf{u}}_{i,1} \tilde{\mathbf{u}}_{i,1}^T \right] M^T\end{aligned}$$

Bir taşıma matrisi, tek parçacık koordinatlarını taşıırken aynı zamanda demetin faz uzayındaki yayılımını ve yönelimini de belirler.

Doğrusal Taşınımda RMS Emitansın Korunumu

Kovaryans matrisi taşınım bağıntısı, RMS emitansın giriş kesitinden çıkış kesitine nasıl değiştiğini gösterir.

$$\Sigma_{x,2} = M\Sigma_{x,1}M^T$$

Bağıntının her iki tarafının determinantı alınır:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{rms},x,2}^2 &= \det \Sigma_{x,2} \\ &= \det (M\Sigma_{x,1}M^T) \\ &= \det M \det \Sigma_{x,1} \det M^T \\ &= (\det M)^2 \varepsilon_{\text{rms},x,1}^2\end{aligned}$$

Doğrusal ve korunumlu enine hareket için:

$$\det M = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{\text{rms},x,2} = \varepsilon_{\text{rms},x,1}}$$

Taşınım sırasında α , β ve γ değişebilir. Bu nedenle demetin konum ve yörünge eğimi yayılımları da değişir:

$$\sigma_x^2 = \varepsilon_{\text{rms},x}\beta, \quad \sigma_{x'}^2 = \varepsilon_{\text{rms},x}\gamma, \quad \sigma_{xx'} = -\varepsilon_{\text{rms},x}\alpha$$

Ancak bu değişimler RMS emitansı değiştirmez; yalnızca demet elipsinin biçimini ve yönelimini değiştirir.

Bu sonuç, yatay ve düşey hareketin birbirinden bağımsız olduğu doğrusal ve korunumlu sistemlerde geçerlidir. Saçılma, parçacık kaybı, doğrusal olmayan alanlar ve düzlemler arasındaki bağlaşım, izdüşümsel RMS emitansı değiştirebilir.

Demetin daralması, emitansın küçüldüğü anlamına gelmez; faz uzayı elipsinin alanı korunurken biçimi değişebilir.

Demet Eşleştirme (Matching)

Demet hattının seçilen bir kesitindeki RMS faz uzayı elipsinin, ilerideki başka bir kesitte istenen biçime ve yönelime sahip olması gerekebilir. Demet eşleştirme, başlangıçtaki kovaryans matrisinin ayarlanabilir optik elemanlar kullanılarak hedef kovaryans matrisine dönüştürülmesidir.

Neden gerekli?

Başlangıçtaki demet elipsi hedef kesitteki optik koşullarla uyumlu değilse, RMS emitans korunsa bile demet boyutu ve yörünge eğimi yayılımı istenen değerleri almaz. Bu uyumsuzluk, demet zarfının salınmasına ve bazı kesitlerde açıklık sınırına yaklaşmasına neden olabilir.

Konum profili, yörünge eğimi dağılımını içermediğinden eşleştirme koşulu yalnızca demet profiliyle belirlenemez. Konum ve yörünge eğimi yayılımlarını birlikte içeren kovaryans matrisi kullanılmalıdır.

Demet Eşleştirme (Matching)

Nasıl Yapılır?

Başlangıç kesitindeki kovaryans matrisi Σ_1 , hedef kovaryans matrisi Σ_h , iki kesit arasındaki toplam taşıma matrisi ise R ile gösterilsin. Hedef kesite taşınan kovaryans matrisi:

$$\Sigma_2 = R\Sigma_1R^T$$

biçiminde hesaplanır. Demet eşleştirme koşuluna göre:

$$\Sigma_2 = \Sigma_h \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Sigma_h = R\Sigma_1R^T}$$

bağıntısının sağlanması gerekir.

Yatay ve düşey hareketin birbirinden bağımsız olduğu doğrusal demet hatlarında ayarlanabilir elemanlar çoğunlukla kuadropollerdir. Kuadropollerin odaklama güçleri, taşınan demetin Twiss parametreleri hedef değerleri alıncaya kadar değiştirilir:

$$\beta_2 = \beta_h, \quad \alpha_2 = \alpha_h$$

γ , aşağıdaki bağıntıyla belirlendiğinden ayrıca eşleştirilmesi gereken bağımsız bir parametre değildir:

$$\beta\gamma - \alpha^2 = 1$$

Doğrusal ve korunumlu eşleştirme RMS emitansı değiştirmez; demet elipsinin alanı korunurken biçimi ve yönelimi hedef optiğe uygun hâle getirilir.

Periyodik Örgüyle Demet Eşleşmesi

RMS emitans korunsa da demet elipsinin biçimi ve yönelimi demet hattı boyunca değişebilir. Periyodik bir örgüde demetin ardışık periyotların eşdeğer kesitlerinde aynı RMS faz uzayı elipsine sahip olması **periyodik demet eşleşmesi** olarak adlandırılır.

Demet periyodik örgüye eşleştirildiğinde hedef kesitte elde edilen kovaryans matrisi Σ_2 , hedef kovaryans matrisi Σ_h ve eşleşmiş demetin kovaryans matrisi Σ_m birbirine eşittir:

$$\Sigma_2 = \Sigma_h = \Sigma_m$$

Bir örgü periyodunun taşıma matrisi M_p ile gösterilsin. Periyodik eşleşme koşulu:

$$\Sigma_m = M_p \Sigma_m M_p^T$$

Bu koşul, eşleşmiş demetin kovaryans matrisinin bir örgü periyodu boyunca taşındıktan sonra değişmediğini gösterir.

Örgü periyodunun uzunluğu L_p olduğunda eşleşmiş demetin Twiss parametreleri, ardışık periyotların eşdeğer kesitlerinde aynı değerleri alır:

$$\beta(s + L_p) = \beta(s), \quad \alpha(s + L_p) = \alpha(s), \quad \gamma(s + L_p) = \gamma(s)$$

Buna bağlı olarak RMS demet boyutu da eşdeğer kesitlerde aynı değeri alır:

$$\sigma_x(s + L_p) = \sigma_x(s), \quad \sigma_x(s) = \sqrt{\varepsilon_{\text{rms},x} \beta(s)}$$

Eşleşmiş bir demetin boyutu bir örgü periyodu içinde sabit olmak zorunda değildir. Demet daralıp genişleyebilir; ancak ardışık periyotların eşdeğer kesitlerinde aynı boyuta ve faz uzayı yönelimine sahip olur.

Eşleşmeyen Demette Zarf Salınımı

Periyodik örgünün girişindeki demet elipsi, örgünün eşleşmiş elipsinden farklıysa demet eşleşmemiştir:

$$\Sigma_2 \neq \Sigma_m$$

Eşleşmemiş demetin kovaryans matrisi, n örgü periyodu sonunda:

$$\Sigma^{(n)} = M_p^n \Sigma_2 (M_p^T)^n$$

biçiminde taşınır. Burada $\Sigma^{(n)}$, demetin n periyot sonundaki kovaryans matrisidir.

Σ_2 , periyodik eşleşme koşulunu sağlamadığından:

$$M_p \Sigma_2 M_p^T \neq \Sigma_2$$

olur. Bu nedenle demet elipsinin biçimi ve yönelimi, ardışık periyotların eşdeğer kesitlerinde değişir.

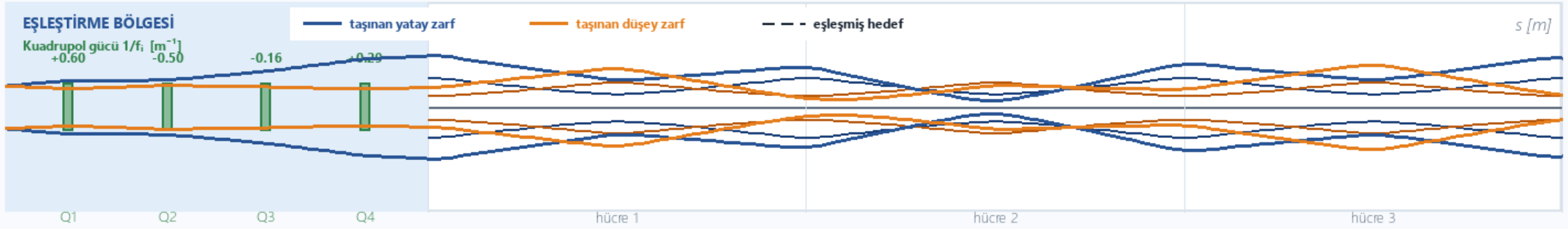
Kovaryans matrisindeki konum yayılımının değişmesi, RMS demet boyutunun da değişmesine neden olur. Referans yörüngesinin iki yanında $\pm \sigma_x(s)$ ile gösterilen RMS demet zarfı, eşleşmiş demet zarfının çevresinde salınır.

Bütün parçacıklara aynı doğrusal ve korunumlu taşıma matrisi uygulandığında RMS emitans korunur. Buna karşın eşleşmemiş demetin ulaşabileceği en büyük boyut, eşleşmiş demetinkinden daha büyük olabilir. Bu durum, demetin açıklık sınırına yaklaşmasına ve parçacık kaybı olasılığının artmasına neden olabilir.

Eşleşme hatası tek başına RMS emitansı büyütmez; doğrusal ve korunumlu taşınımında yalnızca demet elipsinin ve RMS demet zarfının salınmasına neden olur.

Demet Eşleştirmenin Zarf ve Faz Uzayına Etkisi

Eşleşmiş ve Eşleşmemiş Demet Zarfları

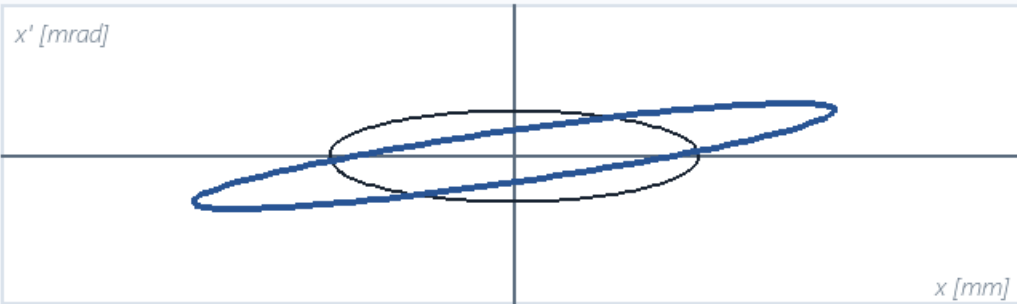


KUADROPOLLER AYARLANIYOR

Her kuadropolün ince mercek gücü $1/f_i$ değiştiriliyor.

Hedef kesitte yatay RMS faz uzayı elipsi (x, x')

$\epsilon_{rms} = 3.00 \text{ mm}\cdot\text{mrad}$

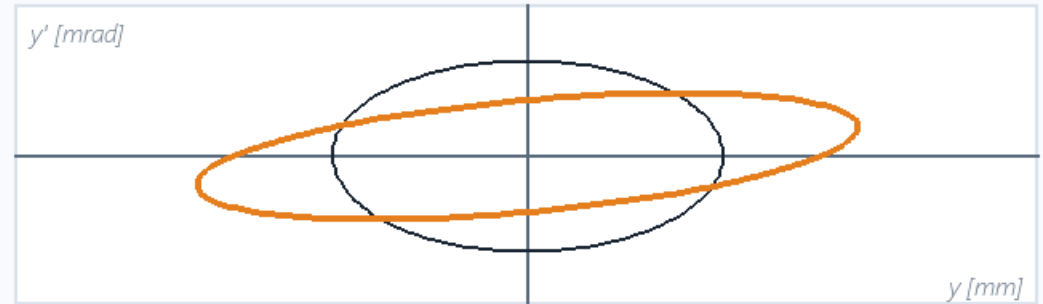


taşınan: $\beta = 10.34 \text{ m}$, $\alpha = -1.75$

hedef: $\beta = 3.42 \text{ m}$, $\alpha = +0.00$

Hedef kesitte düşey RMS faz uzayı elipsi (y, y')

$\epsilon_{rms} = 2.20 \text{ mm}\cdot\text{mrad}$



taşınan: $\beta = 2.10 \text{ m}$, $\alpha = -0.51$

hedef: $\beta = 0.73 \text{ m}$, $\alpha = -0.00$

Betatron Hareketi ve Momentum Sapması

Referans parçacığın momentumu, demetin tasarım momentumudur ve p_0 ile gösterilir. Demetteki herhangi bir parçacığın momentumu p olduğunda bağıl momentum sapması:

$$\delta \equiv \frac{p - p_0}{p_0}$$

Momentum sapması hesaba katıldığında parçacığın yatay hareket denklemi:

$$x''(s) + K(s)x(s) = \frac{\delta}{\rho(s)}$$

olur. Burada $K(s)$ yatay odaklama fonksiyonunu, $\rho(s)$ ise referans yörüngesinin yerel eğrilik yarıçapını gösterir.

Momentum sapması bulunmadığında hareket denklemi Hill denklemine indirgenir:

$$\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad x_\beta''(s) + K(s)x_\beta(s) = 0$$

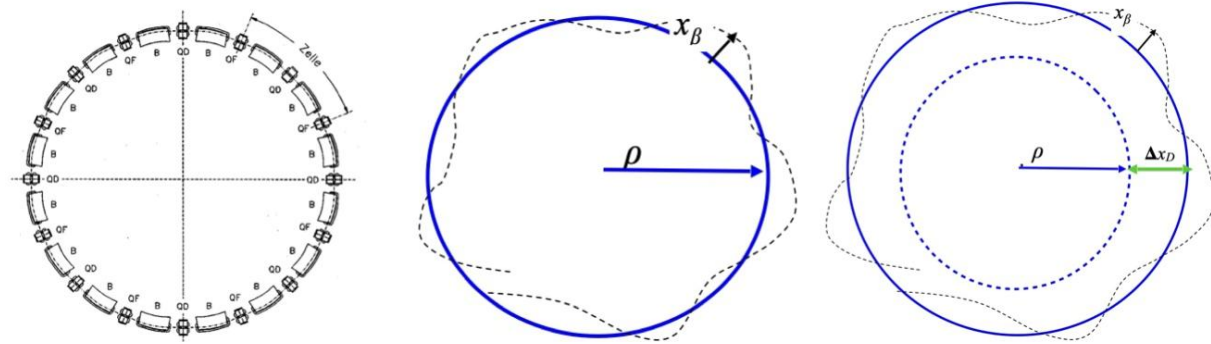
Bu denklemin kararlı çözümü, parçacığın enine salınımını betimler. Bu salınıma **betatron hareketi** denir:

$$x_\beta(s) = \sqrt{\varepsilon\beta(s)} \cos \Theta(s)$$

Momentum sapması bulunduğunda ($\delta \neq 0$) hareket denklemi homojen değildir. Yatay hareket, betatron hareketi ile momentum sapmasından kaynaklanan ek yer değiştirmenin toplamıdır:

$$x(s) = x_\beta(s) + x_D(s)$$

Burada $x_D(s)$, momentum sapmasından kaynaklanan yatay yer değiştirmeyi gösterir.



[B. Holzer, Transverse beam dynamics CERN-2024-003](#)

$\delta = 0$ durumunda yatay hareket yalnızca betatron hareketinden oluşur. $\delta \neq 0$ olduğunda betatron hareketine dispersif yer değiştirme eklenir.

Yatay Dispersiyon

Doğrusal yaklaşımda, momentum sapmasından kaynaklanan yatay yer değiştirme bağıl momentum sapmasıyla orantılıdır:

$$x_D(s) = D_x(s)\delta$$

Burada $D_x(s)$, yatay dispersiyon fonksiyonudur ve birim bağıl momentum sapmasının oluşturduğu yatay yer değiştirmeyi gösterir.

$$D_x(s) \equiv \frac{x_D(s)}{\delta}$$

Parçacığın toplam yatay konumu ve yörünge eğimi

$$x(s) = x_\beta(s) + D_x(s)\delta, \quad x'(s) = x'_\beta(s) + D'_x(s)\delta$$

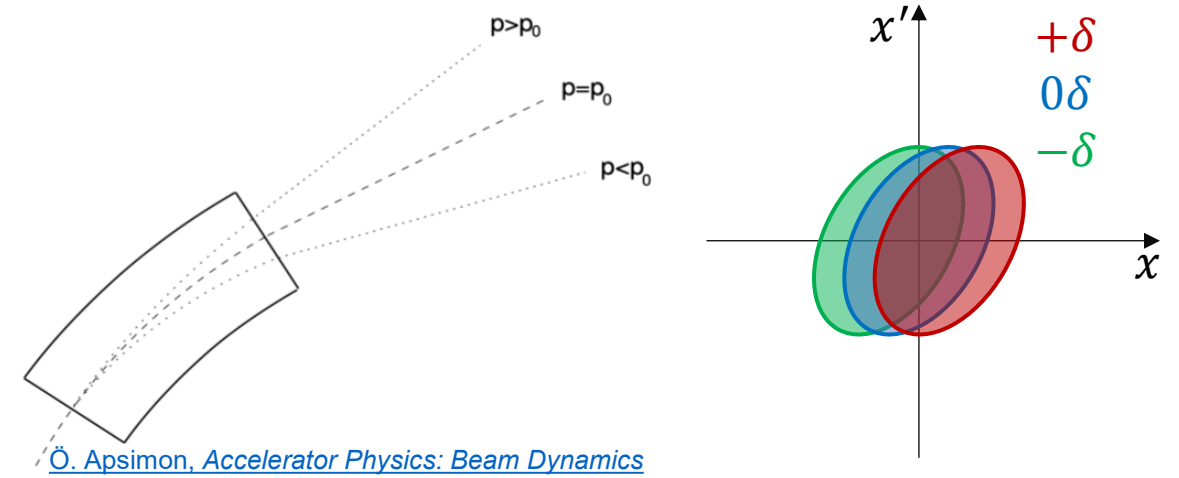
Burada

$$D'_x(s) \equiv \frac{dD_x(s)}{ds}$$

dispersiyonun demet hattı boyunca değişimini gösterir.

$$x_D(s) = D_x(s)\delta \quad \Rightarrow$$

$$D_x''(s) + K(s)D_x(s) = \frac{1}{\rho(s)}$$



[Ö. Apsimon, Accelerator Physics: Beam Dynamics](#)

- Çift kutuplu mıknatıslarda $1/\rho(s) \neq 0$ olduğundan dispersiyon denkleminin sağ tarafı sıfır değildir. Bu nedenle yatay dispersiyon bükülme bölgelerinde oluşur.
- Sürüklenme bölgelerinde ve dört kutuplu mıknatıslarda $1/\rho(s) = 0$ olduğundan dispersiyon denkleminin sağ tarafı sıfırdır. Bu elemanlar yeni dispersiyon oluşturmaz; ancak mevcut dispersiyonun demet hattı boyunca değişmesine neden olur.

Yatay dispersiyon, parçacığın momentum sapmasını yatay konum ve yörünge eğimi sapmasına dönüştürür.

Momentum Yayılımının Yatay Demet Boyutuna Katkısı

Bir demetteki parçacıkların bağıl momentum sapmaları tek bir değere sahip değildir. Momentum dağılımının merkezi ve RMS yayılımı

$$\bar{\delta} = \langle \delta \rangle, \quad \tilde{\delta} = \delta - \bar{\delta}, \quad \sigma_{\delta}^2 = \langle \tilde{\delta}^2 \rangle$$

biçiminde tanımlanır. Parçacığın yatay konumu

$$x(s) = x_{\beta}(s) + D_x(s)\delta$$

olduğundan, dağılım merkezinden sapması

$$\tilde{x}(s) = \tilde{x}_{\beta}(s) + D_x(s)\tilde{\delta}$$

biçiminde yazılır. Buna göre yatay konum varyansı

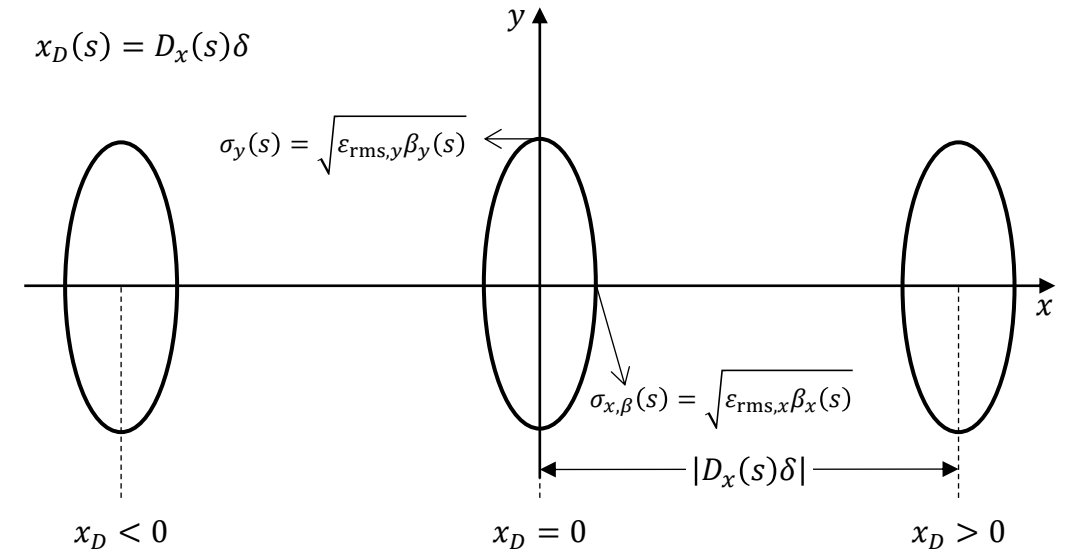
$$\sigma_x^2(s) = \langle \tilde{x}_{\beta}^2 \rangle + 2D_x(s)\langle \tilde{x}_{\beta}\tilde{\delta} \rangle + D_x^2(s)\sigma_{\delta}^2$$

olur. Betatron hareketi ile momentum sapması arasında korelasyon bulunmadığında ($\langle \tilde{x}_{\beta}\tilde{\delta} \rangle = 0$)

$$\langle \tilde{x}_{\beta}^2 \rangle = \varepsilon_{\text{rms},x}\beta_x(s)$$

olduğundan yatay RMS demet boyutu

$$\sigma_x(s) = \sqrt{\varepsilon_{\text{rms},x}\beta_x(s) + D_x^2(s)\sigma_{\delta}^2}$$



Farklı $x_D(s) = D_x(s)\delta$ değerleri için varsayımsal tek momentumlu demet kesitleri gösterilmiştir; gerçek bir demette momentum sapmaları genellikle sürekli bir dağılım oluşturur.

Dispersiyonlu bir kesitte yatay demet profili yalnızca enine emitansı değil, demetin momentum yayılımını da içerir.

Solenoidde Dört Boyutlu Demet Taşınımı

Enine hız bileşeni bulunan parçacık, solenoidin boyuna manyetik alanında sarmal bir yörünge izler. Solenoidin aktarım matrisi, çıkıştaki yatay koordinatları girişteki düşey koordinatlara; çıkıştaki düşey koordinatları da girişteki yatay koordinatlara bağlar.

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\perp} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}' \\ \tilde{y} \\ \tilde{y}' \end{bmatrix}, \quad \Sigma_{\perp} = \langle \tilde{\mathbf{u}}_{\perp} \tilde{\mathbf{u}}_{\perp}^T \rangle = \begin{bmatrix} \Sigma_x & C_{xy} \\ C_{xy}^T & \Sigma_y \end{bmatrix}$$

Burada Σ_x ve Σ_y , sırasıyla yatay ve düşey faz uzayı dağılımlarını; C_{xy} ise iki düzlem arasındaki kovaryansları içerir:

$$C_{xy} = \begin{bmatrix} \langle \tilde{x} \tilde{y} \rangle & \langle \tilde{x} \tilde{y}' \rangle \\ \langle \tilde{x}' \tilde{y} \rangle & \langle \tilde{x}' \tilde{y}' \rangle \end{bmatrix}$$

Solenoidde kovaryans matrisinin taşınımı:

$$\Sigma_{\perp,2} = M_{\text{sol}} \Sigma_{\perp,1} M_{\text{sol}}^T$$

$$\underbrace{\Sigma_{\perp,1} = \begin{bmatrix} \Sigma_{x,1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{y,1} \end{bmatrix}}_{C_{xy,1}=0} \xrightarrow{M_{\text{sol}}(\cdot)M_{\text{sol}}^T} \underbrace{\Sigma_{\perp,2} = \begin{bmatrix} \Sigma_{x,2} & C_{xy,2} \\ C_{xy,2}^T & \Sigma_{y,2} \end{bmatrix}}_{C_{xy,2} \neq 0}$$

Solenoid çıkışındaki demet, yalnızca $\Sigma_{x,2}$ ve $\Sigma_{y,2}$ kullanılarak tam olarak betimlenemez.

Doğrusal ve korunumlu taşınımında

$$\det M_{\text{sol}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \det \Sigma_{\perp,2} = \det \Sigma_{\perp,1}$$

olur. Dört boyutlu kovaryans matrisinin determinanı korunurken yatay ve düşey izdüşümsel RMS emitanslar değişebilir.

Solenoidde demet, iki bağımsız 2×2 kovaryans matrisiyle değil, x , x' , y ve y' değişkenlerini birlikte içeren 4×4 kovaryans matrisiyle taşınır.

Senkron Parçacık ve Boyuna Dinamiğin Durum Değişkenleri

RF kavitesine her turda aynı fazda ulaşan ve o tur için belirlenen tasarım enerjisine sahip olan referans parçacığa **senkron parçacık** denir.

Boyuna demet dinamiği, parçacıkların RF kavitesine varış zamanlarının ve enerjilerinin senkron parçacığa göre değişimini inceler.

Belirli bir turda senkron parçacığın RF kavitesine varış zamanı t_s , kaviteye ulaştığı andaki RF fazı ϕ_s ve toplam enerjisi E_s ile gösterilir. İncelenen parçacığın karşılık gelen büyüklükleri ise sırasıyla t , ϕ ve E ile gösterilir.

Bu büyüklükler kullanılarak varış zamanı, RF fazı ve enerji sapmaları şöyle tanımlanır:

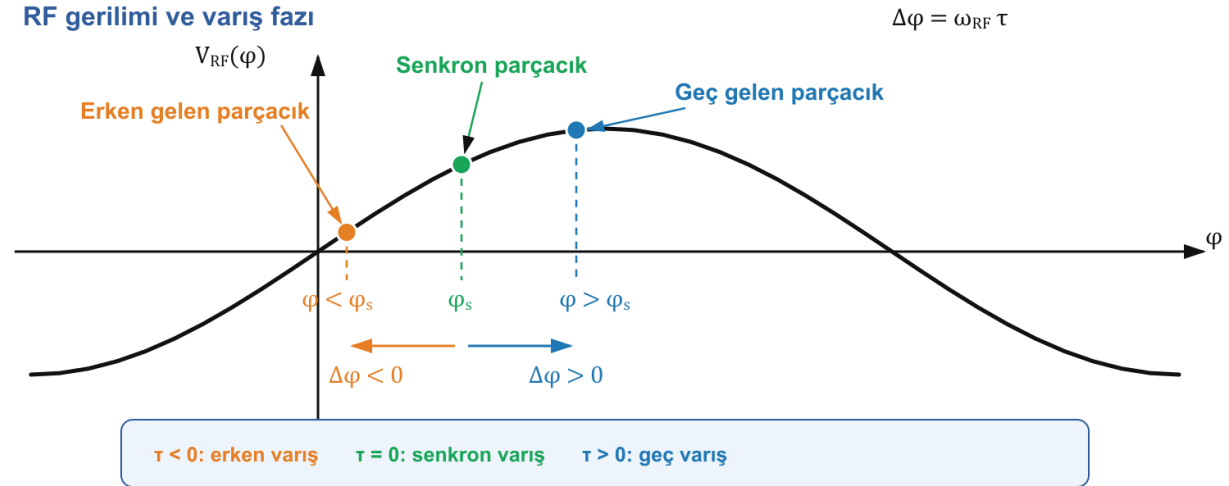
$$\tau \equiv t - t_s, \quad \Delta\phi \equiv \phi - \phi_s = \omega_{RF}\tau, \quad \Delta E \equiv E - E_s$$

Burada ω_{RF} , RF açısal frekansıdır.

Parçacığın boyuna durum vektörü

$$\mathbf{u}_{\parallel} = \begin{bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta E \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanır. $(\Delta\phi, \Delta E)$ düzlemi **boyuna faz uzayı** olarak adlandırılır.



Şekilde senkron parçacık RF kavitesine ϕ_s fazında ulaşır. Erken gelen parçacık için $\tau < 0$ ve $\Delta\phi < 0$; geç gelen parçacık için $\tau > 0$ ve $\Delta\phi > 0$ olur. Dolayısıyla varış zamanı sapması ile faz sapması aynı işareti taşır.

Bir parçacığın boyuna durumu, RF fazı sapması ve enerji sapması birlikte kullanılarak belirlenir.

RF Fazı ve Enerji Kazancı

RF kavitesindeki gerilim, parçacığın kaviteye ulaştığı andaki RF fazına bağlıdır.

$$V_{\text{RF}}(\phi) = \hat{V}_{\text{RF}} \sin \phi$$

Buna göre $\phi = 0$, gerilimin pozitif eğimle sıfırdan geçtiği fazdır.

Yükü q olan bir parçacığın RF kavitesinden tek geçişteki enerji değişimi

$$\Delta E_{\text{RF}}(\phi) = qV_{\text{RF}}(\phi) = q\hat{V}_{\text{RF}} \sin \phi$$

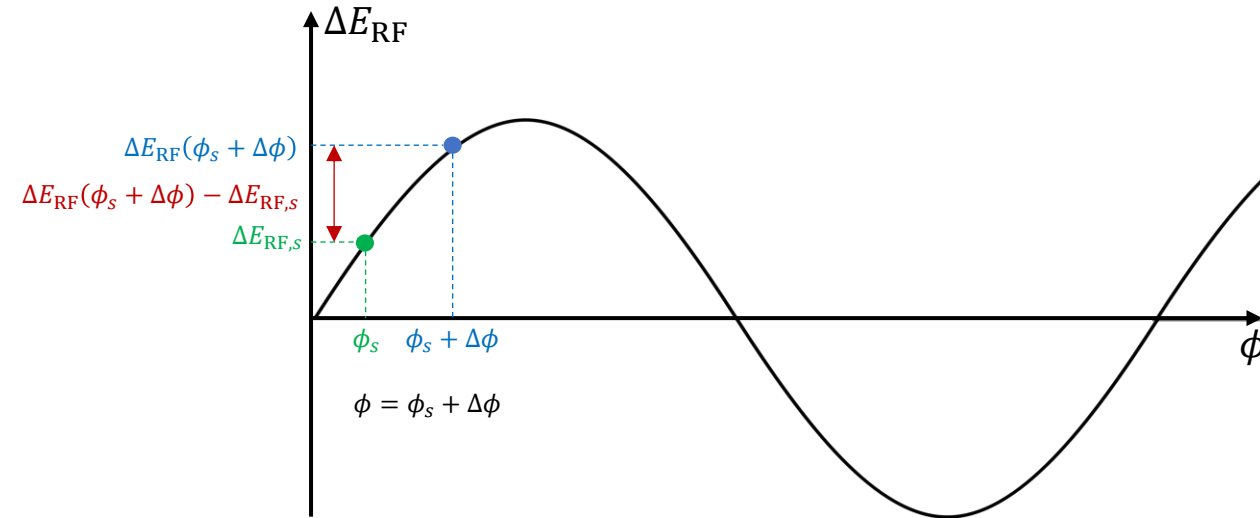
biçimindedir. Senkron parçacığın kavitedeki enerji değişimi ise

$$\Delta E_{\text{RF},s} = q\hat{V}_{\text{RF}} \sin \phi_s$$

Fazı $\phi = \phi_s + \Delta\phi$ olan bir parçacığın enerji değişimi ile senkron parçacığın enerji değişimi arasındaki fark:

$$\Delta E_{\text{RF}}(\phi) - \Delta E_{\text{RF},s} = q\hat{V}_{\text{RF}}[\sin(\phi_s + \Delta\phi) - \sin \phi_s]$$

Burada, ΔE_{RF} parçacığın kaviteden tek geçişteki enerji değişimini gösterir. Parçacığın senkron parçacığa göre enerji sapması olan ΔE ile karıştırılmamalıdır.



RF kavitesindeki enerji değişimi parçacığın varış fazına bağlıdır; bu nedenle varış zamanı farkı, parçacığın enerji sapmasını değiştirebilir.

Momentum Sapmasının Devir Süresine Etkisi

Bir parçacığın devir süresi, kapalı yörüngesinin uzunluğuna (C) ve ortalama hızına (v) bağlıdır:

$$T = \frac{C}{v}$$

Parçacığın momentumu p , referans parçacığın momentumu p_0 olmak üzere bağıl momentum sapması

$$\delta \equiv \frac{p-p_0}{p_0}$$

biçiminde tanımlanır. Momentum sapması, parçacığın hem kapalı yörünge uzunluğunu hem de hızını değiştirir:

$$C = C_0 + \Delta C, \quad v = v_0 + \Delta v, \quad T = T_0 + \Delta T$$

Küçük sapmalar için devir süresindeki bağıl değişim

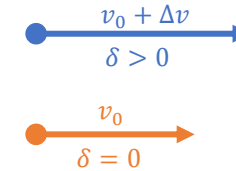
$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta C}{C_0} - \frac{\Delta v}{v_0}$$

Görelilik bağıntısına göre hızdaki bağıl değişim

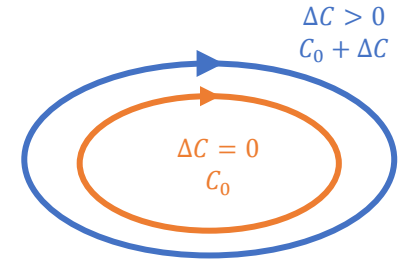
$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{\delta}{\gamma_0^2}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}}, \quad \beta_0 = \frac{v_0}{c}$$

Bu sonuç devir süresi bağıntısında kullanıldığında

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta C}{C_0} - \frac{\delta}{\gamma_0^2}$$



Daha yüksek hız, devir süresini azaltır.



Daha uzun yörünge, devir süresini artırır.

Momentum sapması, yörünge uzunluğu ile hız üzerinden devir süresini iki ayrı biçimde etkiler.

Momentum Sıkıştırma Katsayısı ve Kayma Çarpanı

Momentum sıkıştırma katsayısı

Momentum sapması bulunan bir parçacığın dispersif yatay yer değiştirmesi

$$x_D(s) = D_x(s)\delta$$

bağıntısıyla belirlenir. Eğrilik bulunan bölgelerde bu yer değiştirme, parçacığın kapalı yörünge uzunluğunu değiştirir:

$$\Delta C = \oint \frac{x_D(s)}{\rho(s)} ds = \delta \oint \frac{D_x(s)}{\rho(s)} ds$$

Yörünge uzunluğundaki bağıl değişimin bağıl momentum sapmasına oranı, **momentum sıkıştırma katsayısı** olarak tanımlanır:

$$\alpha_c \equiv \frac{\Delta C/C_0}{\delta} = \frac{1}{C_0} \oint \frac{D_x(s)}{\rho(s)} ds$$

Buna göre yörünge uzunluğundaki bağıl değişim

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \alpha_c \delta$$

Kayma çarpanı

Devir süresindeki bağıl değişim

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta C}{C_0} - \frac{\delta}{\gamma_0^2}$$

bağıntısıyla belirlenmişti. Yörünge uzunluğundaki bağıl değişim

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \alpha_c \delta$$

biçiminde yazıldığında

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \left(\alpha_c - \frac{1}{\gamma_0^2} \right) \delta$$

Kayma çarpanı, devir süresindeki bağıl değişimin bağıl momentum sapmasına oranı olarak tanımlanır:

$$\eta \equiv \frac{\Delta T/T_0}{\delta} = \alpha_c - \frac{1}{\gamma_0^2} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_0} = \eta \delta$$

Devir açısal frekansının bağıl değişimi:

$$\frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} = -\frac{\Delta T}{T_0} = -\eta \delta$$

Momentum sıkıştırma katsayısı, demet boyutundaki bir sıkışmayı değil, kapalı yörünge uzunluğunun momentuma bağlı değişimini gösterir. Kayma çarpanı, bu değişim ile hız değişiminin devir süresindeki toplam etkisini verir.

Geçiş Enerjisi ve Faz Kaymasının Yönü

Momentum sıkıştırma katsayısı pozitif olan bir halkada, kayma çarpanının sıfıra eşit olduğu enerji geçiş enerjisi olarak tanımlanır:

$$\eta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_c - \frac{1}{\gamma_t^2} = 0$$
$$\gamma_t = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c}} \quad \Rightarrow \quad E_t = \gamma_t m c^2$$

Burada γ_t geçiş Lorentz çarpanını, E_t geçiş enerjisini, m ise parçacığın durgun kütesini gösterir.

Geçiş enerjisinde, hızdaki değişim ile kapalı yörünge uzunluğundaki değişimin devir süresine etkileri birbirini dengeler:

$$\gamma_0 = \gamma_t \quad \Rightarrow \quad \eta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta T}{T_0} = 0$$

Geçiş enerjisinde, devir süresinin küçük momentum sapmalarına bağlı doğrusal değişimi sıfırdır.

Bir devir süresi içinde RF geriliminin tamamladığı tam salınım sayısına RF harmonik sayısı denir ve h ile gösterilir. Buna göre RF açısal frekansı ile devir açısal frekansı arasındaki bağıntı

$$\omega_{\text{RF}} = h\omega_0, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

biçimindedir. Ardışık iki turdaki faz sapmaları arasındaki fark

$$\Delta\phi_{n+1} - \Delta\phi_n = \omega_{\text{RF}}\Delta T = 2\pi h\eta\delta$$

olarak bulunur. Burada n , tur numarasını göstermektedir.

Pozitif momentum sapması ($\delta > 0$) için:

Enerji Bölgesi	Kayma Çarpanı	Bir Sonraki RF Kavitesi Geçışı
$\gamma_0 < \gamma_t$	$\eta < 0$	$\Delta T < 0$: daha erken
$\gamma_0 = \gamma_t$	$\eta = 0$	$\Delta T = 0$: faz kayması yok
$\gamma_0 > \gamma_t$	$\eta > 0$	$\Delta T > 0$: daha geç

Geçiş enerjisinin altında, devir süresindeki değişimin temel nedeni parçacık hızındaki değişimdir. Geçiş enerjisinin üstünde ise temel neden kapalı yörünge uzunluğundaki değişimdir.

Faz Odaklaması

Faz odaklaması, RF kavitesine erken veya geç ulaşan parçacıkların enerji değişimlerinin, sonraki turlardaki varış zamanı sapmalarını senkron faza doğru yöneltmesidir.

Senkron faz çevresindeki küçük faz sapmaları için enerji değişimi farkı

$$\Delta E_{\text{RF}}(\phi_s + \Delta\phi) - \Delta E_{\text{RF},s} \simeq q\hat{V}_{\text{RF}} \cos \phi_s \Delta\phi$$

Faz sapmasına karşı geri çağırıcı bir etki oluşması için RF enerji değişimi eğimi ile kayma çarpanı zıt işaretli olmalıdır:

$$\eta q \hat{V}_{\text{RF}} \cos \phi_s < 0$$

Geçiş enerjisinin altında

Pozitif yüklü parçacıklar için $\eta < 0$ olduğundan senkron faz, RF eğrisinin yükselen bölümünde bulunmalıdır:

$$\cos \phi_s > 0$$

- Erken gelen parçacık, senkron parçacıktan daha az enerji kazanır ve bir sonraki RF kavitesi geçişine daha geç ulaşır.
- Geç gelen parçacık, senkron parçacıktan daha fazla enerji kazanır ve bir sonraki RF kavitesi geçişine daha erken ulaşır.

Geçiş enerjisinin üstünde

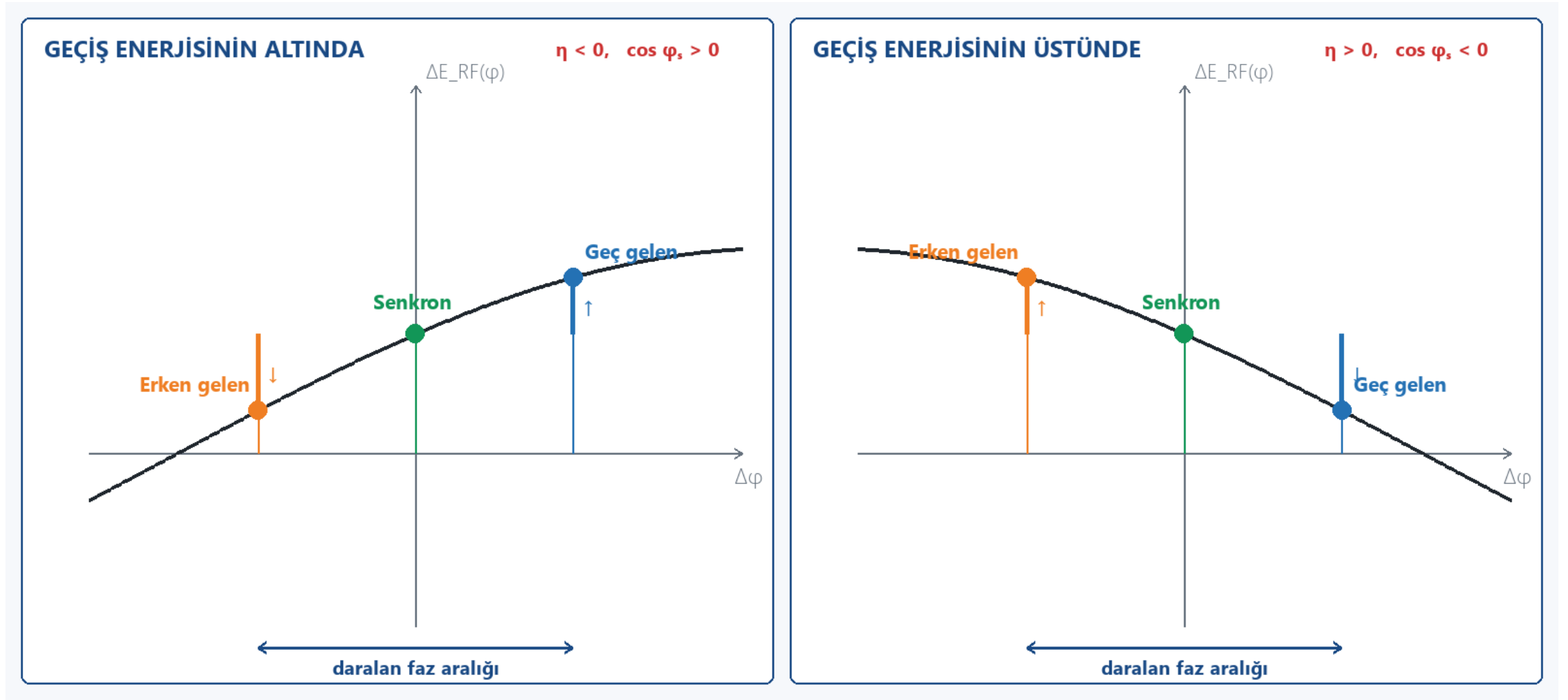
Pozitif yüklü parçacıklar için $\eta > 0$ olduğundan senkron faz, RF eğrisinin alçalan bölümünde bulunmalıdır:

$$\cos \phi_s < 0$$

- Erken gelen parçacık, senkron parçacıktan daha fazla enerji kazanır ve bir sonraki RF kavitesi geçişine daha geç ulaşır.
- Geç gelen parçacık, senkron parçacıktan daha az enerji kazanır ve bir sonraki RF kavitesi geçişine daha erken ulaşır.

RF alanının oluşturduğu geri çağırıcı etki, parçacıkların senkron faz çevresinde boyuna salınım yapmasını sağlar.

Faz Odaklaması



Boyuna Hareket Denklemleri

Bir parçacığın RF kavitesindeki enerji değişimi varış fazına bağlıdır. Parçacığın enerji sapması ise devir süresini ve bir sonraki kavite geçişindeki varış fazını değiştirir.

Faz sapmasının değişimi

Bir turdaki faz değişimi

$$\Delta\phi_{n+1} - \Delta\phi_n = 2\pi h\eta\delta_n$$

bağıntısıyla belirlenir. Küçük enerji ve momentum sapmaları için

$$\delta_n = \frac{\Delta E_n}{\beta_0^2 E_s} \Rightarrow \Delta\phi_{n+1} - \Delta\phi_n = \frac{2\pi h\eta}{\beta_0^2 E_s} \Delta E_n$$

Enerji sapmasının değişimi

Parçacığın ve senkron parçacığın RF kavitesindeki enerji değişimleri arasındaki fark:

$$\Delta E_{n+1} - \Delta E_n = q\hat{V}_{\text{RF}}[\sin(\phi_s + \Delta\phi_n) - \sin\phi_s]$$

Boyuna değişkenler bir tur içinde çok az değişiyorsa, tur başına farklar zaman türevleriyle gösterilebilir:

$$\frac{d\Delta\phi}{dt} = \frac{\omega_{\text{RF}}\eta}{\beta_0^2 E_s} \Delta E, \quad \frac{d\Delta E}{dt} = \frac{q\hat{V}_{\text{RF}}}{T_0} [\sin(\phi_s + \Delta\phi) - \sin\phi_s]$$

$$\Delta\phi \rightarrow \text{RF enerji değişimi} \rightarrow \Delta E \rightarrow \text{devir süresi değişimi} \rightarrow \Delta\phi$$

Faz sapması enerji sapmasını, enerji sapması ise sonraki kavite geçişindeki faz sapmasını değiştirir.

Sinkrotron Salınımı

Faz sapması küçük olduğunda, enerji değişimi denklemindeki sinüs terimi senkron faz çevresinde doğrusallaştırılır:

$$\sin(\phi_s + \Delta\phi) - \sin \phi_s \simeq \cos \phi_s \Delta\phi$$

Bu yaklaşım boyuna hareket denklemlerinde kullanıldığında

$$\frac{d^2\Delta\phi}{dt^2} = \frac{\omega_{RF}\eta q \hat{V}_{RF} \cos \phi_s}{\beta_0^2 E_s T_0} \Delta\phi$$

elde edilir. Sinkrotron açısal frekansı

$$\Omega_s^2 \equiv - \frac{\omega_{RF}\eta q \hat{V}_{RF} \cos \phi_s}{\beta_0^2 E_s T_0}$$

Bu tanım kullanıldığında hareket denklemi

$$\frac{d^2\Delta\phi}{dt^2} + \Omega_s^2 \Delta\phi = 0$$

Bu denklemin çözümü:

$$\Delta\phi(t) = \Delta\phi_{\max} \cos(\Omega_s t + \theta_0)$$

biçimindedir. Burada $\Delta\phi_{\max}$ salınım genliğini, θ_0 başlangıçtaki salınım fazını gösterir.

Parçacığın bir devir sırasında gerçekleştirdiği sinkrotron salınımı sayısı

$$Q_s \equiv \frac{\Omega_s}{\omega_0}$$

olarak tanımlanır.

$$\boxed{\Omega_s^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \eta q \hat{V}_{RF} \cos \phi_s < 0}$$

Kararlılık koşulu sağlandığında, faz ve enerji sapmaları senkron parçacık çevresinde periyodik olarak değişir.

Boyuna Faz Uzayında Hareket

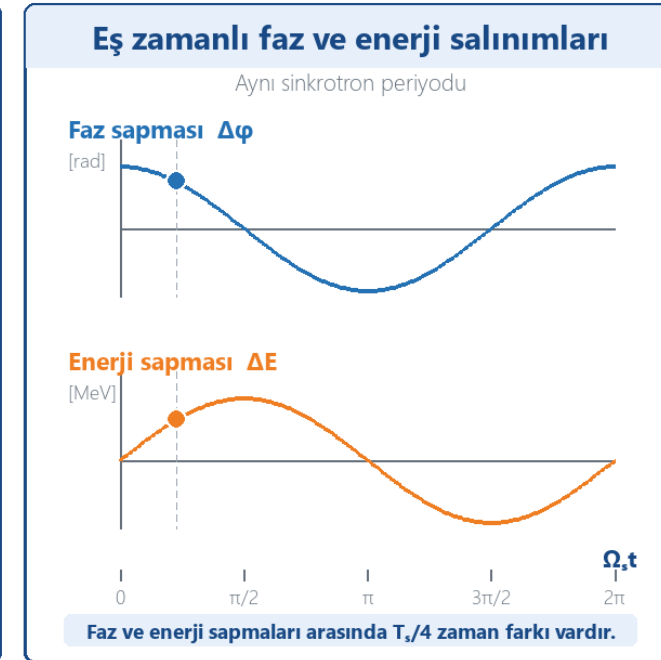
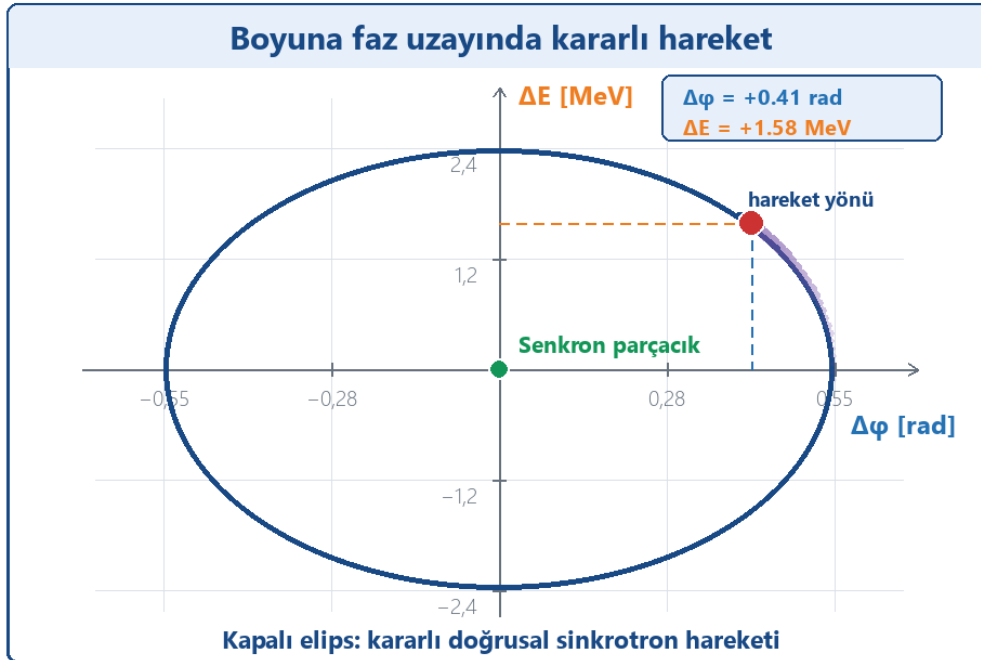
Doğrusal yaklaşımda faz ve enerji sapmaları aynı açısal frekansla salınır; aralarında çeyrek salınım periyodu kadar faz farkı bulunur:

$$\theta(t) = \Omega_s t + \theta_0, \quad \Delta\phi(t) = \Delta\phi_{\max} \cos \theta(t), \quad \Delta E(t) = -\frac{\beta_0^2 E_s \Omega_s}{\omega_{\text{RF}} \eta} \Delta\phi_{\max} \sin \theta(t)$$

Enerji salınımının genliği

$$\Delta E_{\max} \equiv \left| \frac{\beta_0^2 E_s \Omega_s}{\omega_{\text{RF}} \eta} \right| \Delta\phi_{\max} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\Delta\phi}{\Delta\phi_{\max}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta E}{\Delta E_{\max}} \right)^2 = 1$$



Kararlı doğrusal harekette parçacık, boyuna faz uzayında kapalı bir elips üzerinde dolaşır.

Doğrusal Olmayan Boyuna Hareket

Küçük faz sapmaları için elde edilen harmonik çözüm, RF sinüsünün senkron faz çevresinde doğrusallaştırılmasına dayanır. Faz sapması büyüdüğünde sinüs terimi tam biçimiyle korunmalıdır:

$$\frac{d^2 \Delta\phi}{dt^2} = \frac{\omega_{\text{RF}} \eta q \hat{V}_{\text{RF}}}{\beta_0^2 E_s T_0} [\sin(\phi_s + \Delta\phi) - \sin \phi_s]$$

Bu durumda fazı senkron değere yönelten etki, $\Delta\phi$ ile doğrusal değildir. Bunun sonucunda:

- Kararlı noktanın yakınındaki faz uzayı yörüngeleri elipse yakındır.
- Salınım genliği arttıkça yörüngeler elipsten sapar.
- Sinkrotron salınım periyodu genliğe bağlı hâle gelir ve büyük genliklerde uzar.

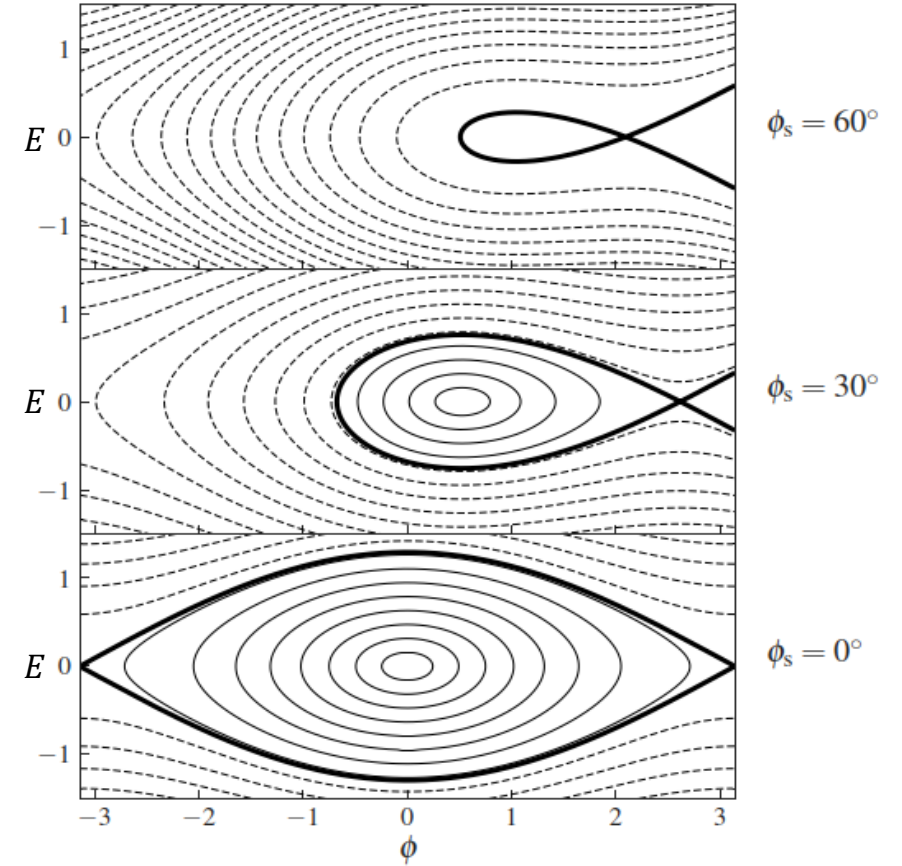
Denge noktalarında faz ve enerji sapmaları değişmez:

$$\Delta E = 0, \quad \sin(\phi_s + \Delta\phi) = \sin \phi_s$$

Kararlılık koşulu ($\eta q \hat{V}_{\text{RF}} \cos \phi_s < 0$) sağlandığında denge noktaları:

$(\Delta\phi, \Delta E) = (0, 0)$	kararlı
$(\Delta\phi, \Delta E) = (\pi - 2\phi_s, 0)$	kararsız

olarak sınıflandırılır.



[F. Tecker, Longitudinal Beam Dynamics - Recap](#)

Senkron parçacık merkezli boyuna faz uzayı, $\Delta\phi = \phi - \phi_s$ ve $\Delta E = E - E_s$ koordinatlarıyla ifade edilir.

Ayırıcı Yörünge (Separatrix) ve RF Kovası

Kararsız denge noktasından geçen ve faz uzayındaki kapalı yörüngeler ile açık yörüngeleri birbirinden ayıran yörüngeye **ayırıcı yörünge (separatrix)** denir.

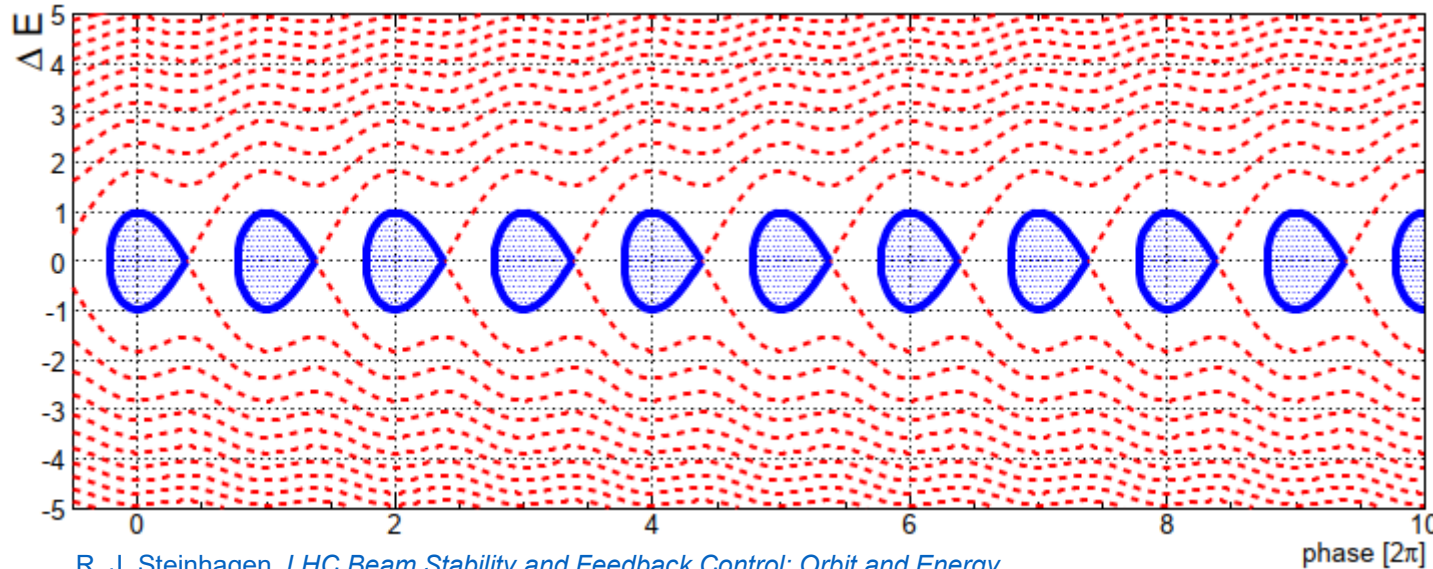
Ayırıcı yörüngeyi içinde

- Faz ve enerji sapmaları sınırlı kalır.
- Parçacık, senkron parçacık çevresinde sinkrotron salınımı yapar.
- Hareket faz uzayında kapalı bir yörünge oluşturur.

Ayırıcı yörüngeyi dışında

- Faz sapması sürekli değişir.
- Hareket faz uzayında kapalı bir yörünge oluşturmaz.
- Parçacık, RF alanı tarafından yakalanmaz.

Ayırıcı yörüngeyi çevrelediği kararlı bölgeye **RF kovası** denir. RF kovasının faz doğrultusundaki genişliği faz kabulünü, enerji doğrultusundaki yüksekliği ise enerji kabulünü belirler.



RF gerilimi 2π periyotlu olduğundan, RF kovaları faz eksenini boyunca tekrarlanır.

RF kovası, parçacıkların kararlı boyuna hareket yapabildiği faz uzayı kabul bölgesidir.

R. J. Steinhagen, *LHC Beam Stability and Feedback Control: Orbit and Energy*

Boyuna Demet Dağılımı ve RMS Emitans

RF kovalarındaki parçacıklar aynı varış zamanına ve enerjiye sahip değildir. Bu nedenle parçacık topluluğu, $(\tau, \Delta E)$ düzleminde sonlu bir dağılım oluşturur. $\Delta\phi = \omega_{RF}\tau$ bağıntısı nedeniyle $(\tau, \Delta E)$ ve $(\Delta\phi, \Delta E)$ gösterimleri sabit bir ölçek çarpanıyla ilişkilidir.

Dağılım merkezinden sapmalar:

$$\begin{aligned}\bar{\tau} &= \langle \tau \rangle, & \overline{\Delta E} &= \langle \Delta E \rangle \\ \tilde{\tau} &= \tau - \bar{\tau}, & \widetilde{\Delta E} &= \Delta E - \overline{\Delta E}\end{aligned}$$

Boyuna kovaryans matrisi:

$$\Sigma_L = \begin{bmatrix} \langle \tilde{\tau}^2 \rangle & \langle \tilde{\tau} \widetilde{\Delta E} \rangle \\ \langle \tilde{\tau} \widetilde{\Delta E} \rangle & \langle \widetilde{\Delta E}^2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_t^2 & \sigma_{\tau E} \\ \sigma_{\tau E} & \sigma_E^2 \end{bmatrix}$$

Burada σ_t , varış zamanının RMS yayılımını; σ_E , enerjinin RMS yayılımını; $\sigma_{\tau E}$ ise varış zamanı ile enerji sapması arasındaki kovaryansı gösterir.

Boyuna RMS emitans:

$$\varepsilon_{\text{rms},L} \equiv \sqrt{\det \Sigma_L} = \sqrt{\sigma_t^2 \sigma_E^2 - \sigma_{\tau E}^2}$$

Boyuna RMS emitans, enerji–zaman boyutuna sahiptir ve genellikle eV·s birimiyle verilir. Karşılık gelen RMS kovaryans elipsinin alanı

$$A_{\text{RMS}} = \pi \varepsilon_{L,\text{rms}}$$

RMS demet uzunluğu:

$$\sigma_z = \beta_0 c \sigma_t$$

Bu bağıntı, varış zamanındaki RMS yayılımı demet doğrultusundaki RMS uzunluğa dönüştürür.

Boyuna RMS emitans, parçacık topluluğunun zaman–enerji faz uzayındaki istatistiksel alan ölçeğini belirler.

Enine ve Boyuna Demet Dinamiğinin Ortak Yapısı

Enine ve boyuna demet dinamiği farklı fiziksel mekanizmalara dayanır. Bununla birlikte her iki hareket de faz uzayı, kararlı salınım, kovaryans matrisi ve RMS emitans kullanılarak betimlenir.

Kavram	Enine demet dinamiği	Boyuna demet dinamiği
Referans durum	Referans yörünge	Senkron parçacık
Durum değişkenleri	x, x'	$\Delta\phi, \Delta E$
Odaklama mekanizması	Manyetik odaklama	RF faz odaklaması
Kararlı hareket	Betatron salınımı	Sinkrotron salınımı
Faz uzayı	(x, x') düzlemi	$(\Delta\phi, \Delta E)$ düzlemi
Kararlı faz uzayı yörüngeleri	Kapalı yörüngeler	Kapalı yörüngeler
Demet dağılımı	Σ_x ve Σ_y kovaryans matrisleri	Σ_L kovaryans matrisi
RMS emitans	$\begin{aligned}\epsilon_{\text{rms},x} &= \sqrt{\det \Sigma_x} \\ \epsilon_{\text{rms},y} &= \sqrt{\det \Sigma_y}\end{aligned}$	$\epsilon_{\text{rms},L} = \sqrt{\det \Sigma_L}$

Her iki durumda da tek parçacığın kararlı hareketi faz uzayındaki kapalı yörüngelerle, parçacık topluluğunun dağılımı ise kovaryans matrisi ve RMS emitansla betimlenir.

Altı Boyutlu Demet Durumu

Demetin yatay, düşey ve boyuna durum değişkenleri tek bir sütun vektöründe birleştirilebilir:

$$\mathbf{u}_6 = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ \Delta\phi \\ \Delta E \end{bmatrix}$$

Dağılım merkezi çevresindeki sapma vektörü ve kovaryans matrisi

$$\tilde{\mathbf{u}}_6 = \mathbf{u}_6 - \langle \mathbf{u}_6 \rangle, \quad \Sigma_6 = \langle \tilde{\mathbf{u}}_6 \tilde{\mathbf{u}}_6^T \rangle$$

biçiminde tanımlanır.

$$\Sigma_6 = \begin{bmatrix} \Sigma_x & C_{xy} & C_{xL} \\ C_{xy}^T & \Sigma_y & C_{yL} \\ C_{xL}^T & C_{yL}^T & \Sigma_L \end{bmatrix}$$

Burada C_{xy} , C_{xL} ve C_{yL} , sırasıyla yatay–düşey, yatay–boyuna ve düşey–boyuna değişkenler arasındaki çapraz kovaryansları içerir.

Düzlemler arasında korelasyon bulunmadığında

$$C_{xy} = C_{xL} = C_{yL} = 0$$

olur ve kovaryans matrisi

$$\Sigma_6 = \begin{pmatrix} \Sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_L \end{pmatrix}$$

biçimine indirgenir.

Uzay yükü (space-charge) etkileri:

Demetin yük ve akım dağılımının doğrudan oluşturduğu elektromanyetik alanların, aynı demetteki parçacıkların hareketini ve demet boyutunu değiştirmesi.

Demetin indüklediği alanlar (wakefields) ve demet yüklemesi:

Demetin hızlandırıcı ve vakum yapılarında indüklediği alanların arkadan gelen parçacıkları veya sonraki demet paketlerini etkilemesi; demet akımının RF kavitesindeki etkin gerilimi değiştirmesi.

Demet–demet etkileşimleri:

Karşılaşan iki demetin elektromanyetik alanları aracılığıyla birbirinin parçacık hareketini ve dağılımını değiştirmesi.

Kolektif demet kararsızlıkları:

Demetin tamamının veya bir bölümünün ortak bir salınım kipinde hareket etmesi ve bu salınımın genliğinin zamanla büyümesi.

Doğrusal olmayan ve kromatik demet dinamiği:

Doğrusal olmayan alanların ve momentuma bağlı odaklama değişiminin parçacık yörüngeleri, rezonanslar ve hareket kararlılığı üzerindeki etkileri.

Enine–boyuna hareket bağlaşımı:

Enine ve boyuna durum değişkenlerinin birbirini etkilediği ve bu hareketlerin bağımsız olarak incelenemediği durumlar.

