

Parçacık Optiği ve Demet Dinamiği

1. Ders

Tek Parçacık Dinamiği ve Parçacık Optiği

Dr. Öğr. Üyesi Ali Can Canbay
Ankara Üniversitesi



Yüklü Bir Parçacığa Enerji Vermek

Elektrik alan, yüklü parçacık üzerinde kuvvet uygular:

$$\vec{F}_E = q\vec{E}$$

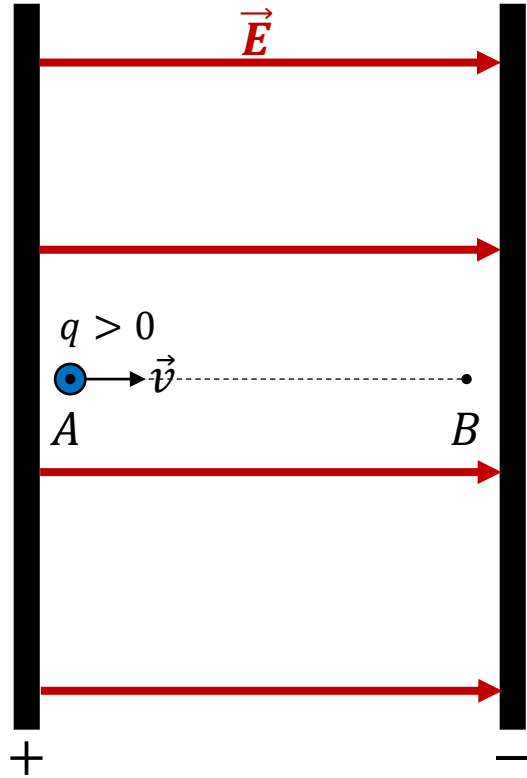
Bu elektrik kuvvetinin, parçacığa aktardığı güç:

$$\frac{dK}{dt} = \vec{F}_E \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

A ile B arasındaki kinetik enerji değişimi, elektrik alanın parçacık üzerinde yaptığı işe eşittir:

$$\Delta K = W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}_E \cdot d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Elektrik alanın hareket doğrultusundaki bileşeni, parçacığın kinetik enerjisini değiştirir.

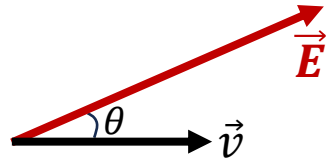


Elektrik Alan Her Zaman Enerji Kazandırır mı?

Pozitif yüklü parçacık için ($q > 0$):

$$\vec{E} \parallel \vec{v} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = qEv > 0$$

Kinetik enerji ve momentum büyüklüğü artar.



$$\frac{dK}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{v} = qEv \cos \theta$$

$$\vec{E} \parallel -\vec{v} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -qEv < 0$$

Kinetik enerji ve momentum büyüklüğü parçacık durana kadar azalır.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_E = q\vec{E}$$

$$\vec{E} \perp \vec{v} \Rightarrow \left. \frac{dK}{dt} \right|_0 \text{ anda} = 0$$

Enerji ve momentum büyüklüğü değişmez; momentumun yönü değişmeye başlar.

Negatif yüklü parçacıkta ($q < 0$) paralel ve zıt yön durumlarının sonuçları tersine döner.

Gerilim Farkı ve Enerji Kazancı

Elektrostatik alanda A ve B noktaları arasındaki elektriksel potansiyel fark:

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

ile tanımlanır. Bu bağıntı, iş-enerji bağıntısı ile birleştirilirse:

$$\boxed{\Delta K = -q\Delta V}$$

Pozitif yüklü parçacık için:

$$q > 0, \quad V_B < V_A$$

$$\Delta V < 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta K > 0$$

Pozitif parçacık düşük potansiyele doğru giderken enerji kazanır.

Elektron için:

$$q = -e, \quad V_B > V_A$$

$$\Delta V > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta K = e\Delta V > 0$$

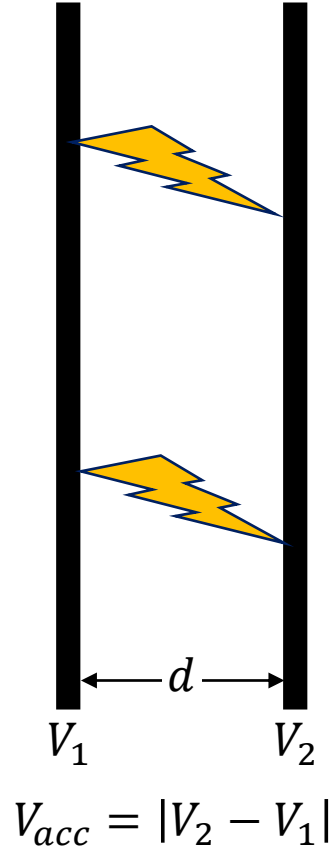
Elektron yüksek potansiyele doğru giderken enerji kazanır.

Elektronvolt

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\boxed{1 \text{ eV} = e \times 1 \text{ V} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}}$$

Elektrostatik Hızlandırmanın Sınırı



Tek bir elektrostatik hızlandırma aralığında kazanılan enerji:

$$\Delta K_{kazanç} = |q|V_{acc}$$

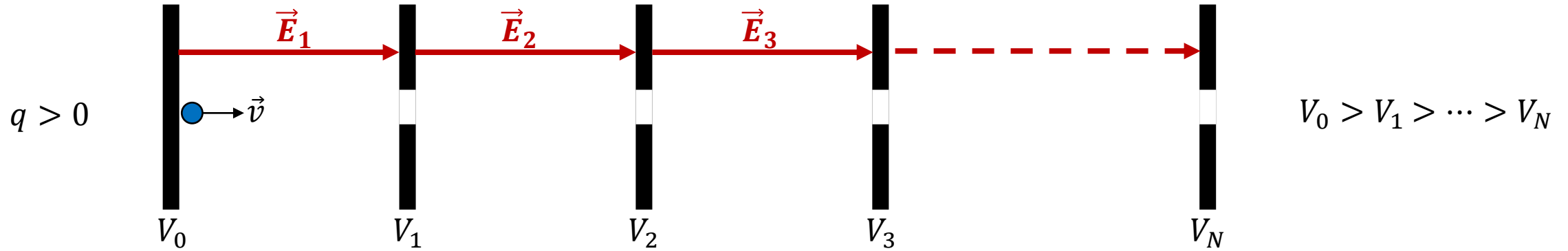
Yaklaşık düzgün alanlı, d aralıklı iki elektrot için:

$$E \simeq \frac{V_{acc}}{d}$$

Gerilim yükseltildiğinde elektrik alan da büyür. Yeterince yüksek alanlarda:

- Gaz içerisinde elektriksel boşalma,
- Yalıtkanlarda dielektrik delinme,
- Vakum sistemlerinde alan emisyonu ve yüzey arkları oluşabilir.

Statik Alanla Art Arda Hızlandırma



Her boşluktaki enerji kazancı:

$$\Delta K_i = q(V_{i-1} - V_i)$$

Toplam enerji kazancı:

$$\Delta K_{\text{toplam}} = \sum_{i=1}^N \Delta K_i = q(V_0 - V_N)$$

Eşit gerilim adımları için:

$$V_0 - V_N = N\Delta V$$

$$\Delta K_{\text{toplam}} = Nq\Delta V$$

Parçacıkları yüksek enerjilere çıkarmak için gerekli toplam potansiyel farkı:

$$V_0 - V_N = \frac{\Delta K_{\text{toplam}}}{q}$$

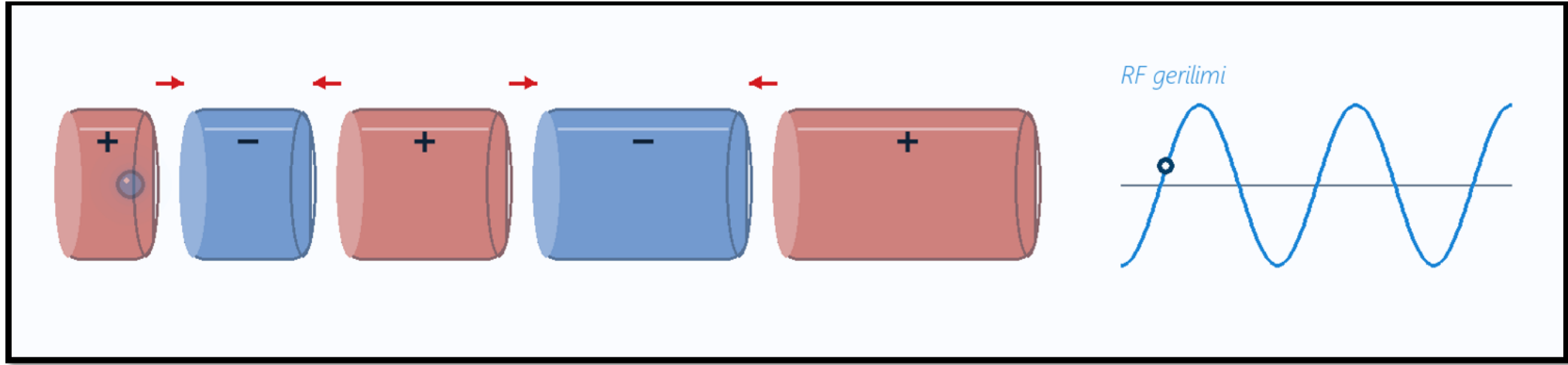
çok büyük değerlere ulaşır. Gerilim kademelere bölünse bile gerekli toplam DC gerilim azalmaz. Bu gerilimin üretilmesi, yalıtılması ve kararlı biçimde tutulması teknolojik sınırlarla kısıtlanır.

Aynı gerilim düzeylerini tekrar tekrar kullanabilmek için statik değil, zamanla değişen bir elektrik alan gerekir.

Radyo Frekans (RF) ile Art Arda Hızlandırma

Statik gerilim kademeleri yerine elektrotlara zamanla değişen bir RF gerilimi uygulanır:

$$V_{\text{RF}}(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi_0), \quad T_{\text{RF}} = \frac{2\pi}{\omega}$$



Boşluktaki enerji kazancı (ince boşluk yaklaşımı: Parçacığın elektrotlar arasındaki boşluğu geçme süresinin RF periyoduna göre çok kısa kabul edildiği yaklaşıma göre):

$$\Delta K_n \simeq qV_{\text{RF}}(t_n) = qV_0 \cos \phi_n, \quad \phi_n = \omega t_n + \phi_0$$

Tüp geçişinde eşzamanlılık

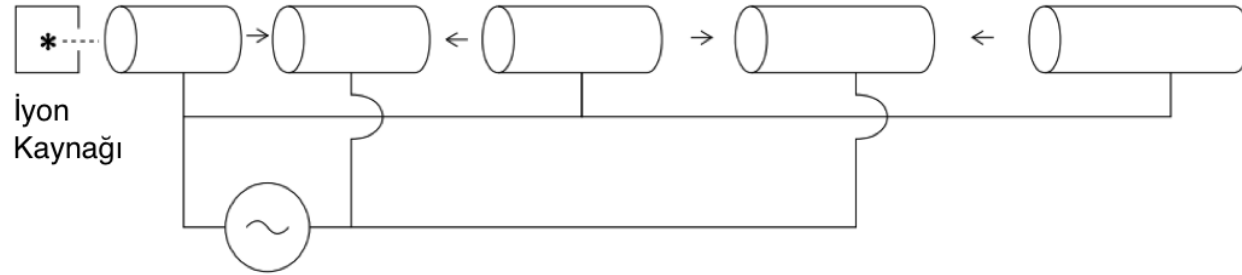
$$\frac{L_n}{v_n} \simeq \frac{T_{\text{RF}}}{2} \quad \Rightarrow \quad L_n \simeq \frac{\beta_n \lambda_{\text{RF}}}{2}$$

Parçacık her boşluğa hızlandırıcı RF fazında ulaşmalıdır; hızı arttıkça eşzamanlılığı korumak için sürüklenme tüpleri uzatılır.

RF Doğrusal Hızlandırıcılar

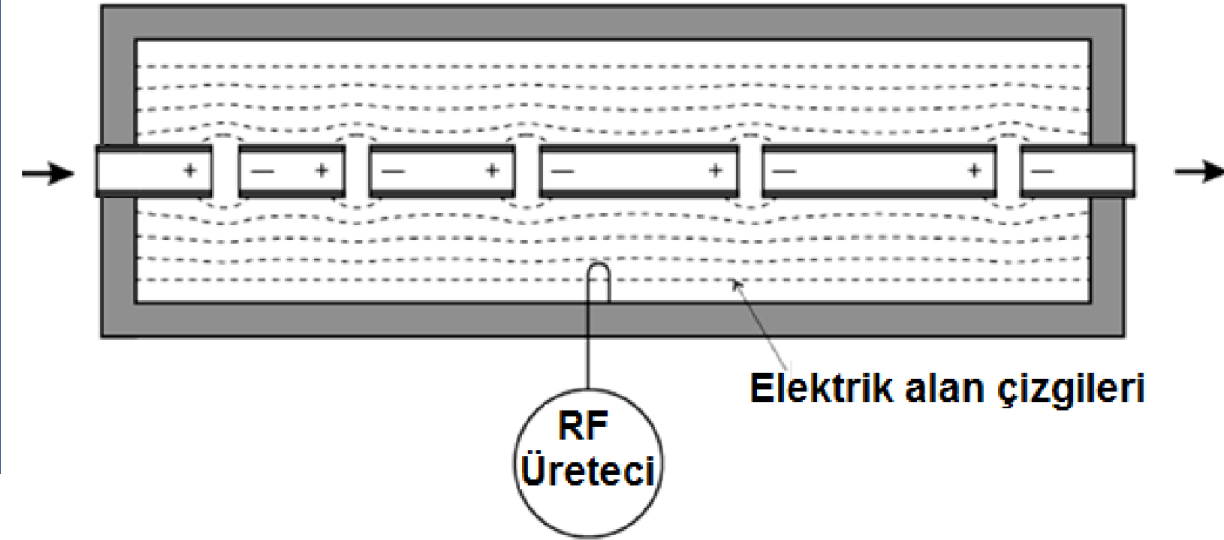
Widerøe doğrusal hızlandırıcısı:

İlk RF doğrusal hızlandırıcı tasarımlarından biridir. Parçacık, RF gerilimine bağlanmış sürüklenme tüpleri arasındaki boşluklarda art arda hızlandırılır.



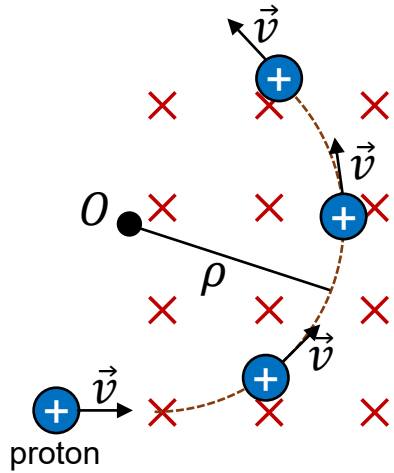
Alvarez sürüklenme tüplü doğrusal hızlandırıcı (DTL):

Sürüklenme tüpleri ortak bir RF rezonatörünün içine yerleştirilmiştir. Rezonatör içinde oluşturulan elektrik alan, parçacığı ardışık boşluklarda hızlandırır.



[B. Akgün vd., Meraklısına Parçacık ve Hızlandırıcı Fiziği](#)

Yüklü Bir Parçacığı Döndürmek



Manyetik Lorentz kuvveti, parçacığın anlık hızına her zaman diktir.

$$\frac{dK}{dt} = \vec{F}_B \cdot \vec{v} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$$

$$K = \text{sabit}, \quad |\vec{p}|: \text{sabit}$$

Ancak momentum vektörü değişmektedir:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_B \neq 0$$

$$\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$F_B = |q|vB \sin \theta$$

Momentumun büyüklüğü sabit kalır, yönü değişir.

Manyetik alan iş yapmadığından parçacıkların enerjilerini değiştirmez (hızlandırmaz veya yavaşlatmaz), yalnızca yörüngeye etki eder.

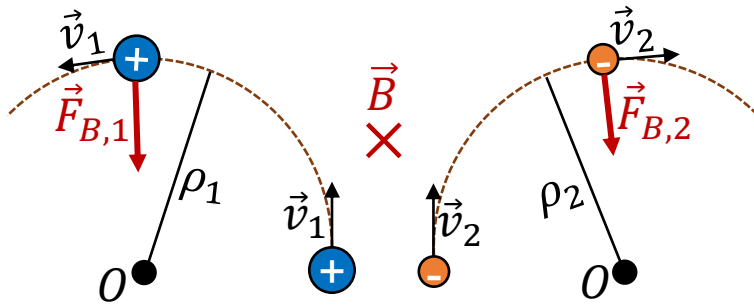
Yüklü Bir Parçacığı Döndürmek

Manyetik alan parçacığı bir yay üzerinde bükerek:

Düzgün manyetik alanda ve $\vec{v} \perp \vec{B}$ iken:

$$F_B = |q|vB \quad \text{ve} \quad \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right| = \frac{pv}{\rho} \quad \Rightarrow \quad |q|vB = \frac{pv}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = |q|B\rho}$$

$$\boxed{\rho = \frac{p}{|q|B}}$$



$$p \uparrow \Rightarrow \rho \uparrow$$
$$B \uparrow \text{ veya } |q| \uparrow \Rightarrow \rho \downarrow$$

Bükülme yönünü yükün işareti, bükülme yarıçapını ise momentum–yük oranı ve manyetik alan belirler.

Dairesel Hızlandırıcılar

Manyetik alan parçacığı eğrisel bir yörüngede dolaştırırken RF boşluğu, parçacığa her geçişinde yeniden enerji kazandırır.

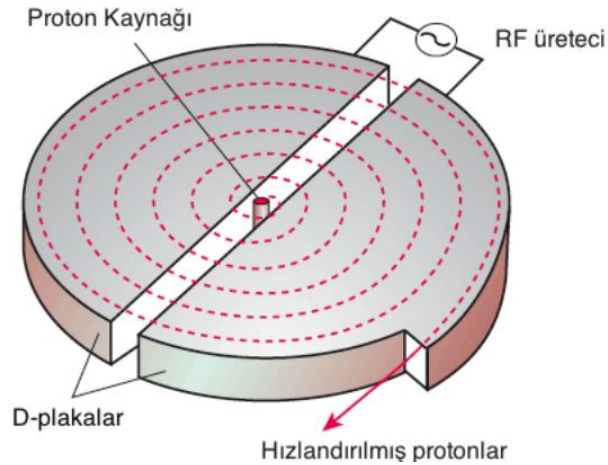
$$\Delta K_{geçiş} \simeq qV_{RF}(t_n),$$

$$\rho = \frac{p}{|q|B}$$

Siklotron (Döndürgeç):

Manyetik alan yaklaşık sabit tutulur: **$B \simeq \text{sabit}$**

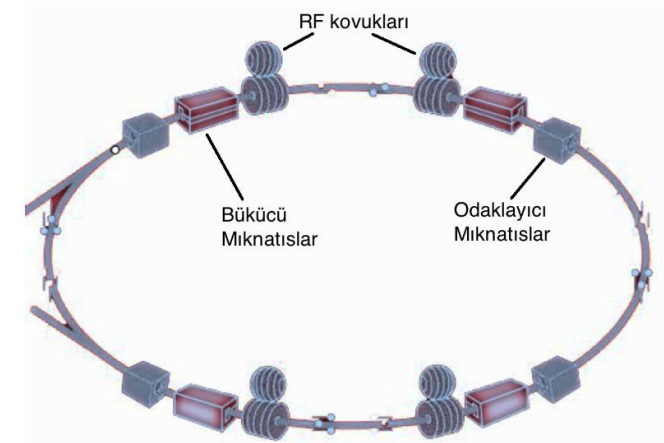
Parçacığın momentumu arttıkça, yörüngesi büyür: dışarıya doğru büyüyen yaklaşık spiral bir yörünge izler.



Sinkrotron (Eşzamanlayıcı)

Yörünge yarıçapı yaklaşık sabit tutulur: **$\rho \simeq \text{sabit}$**

Momentum arttıkça gerekli manyetik alan da artırılır: RF sistemi ile bükücü mıknatısların alanı parçacığın enerjisiyle eşzamanlı olarak değiştirilir.



[B. Akgün vd., Meraklısına Parçacık ve Hızlandırıcı Fiziği](#)

Görelî Enerji ve Momentum

Parçacığın hızı ışık hızına yaklaştığında klasik mekanik bağıntılar geçerliliğini yitirir; enerji ve momentum rölativistik olarak tanımlanır.

Temel parametreler:

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Toplam enerji, kinetik enerji ve momentum:

$$\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 \\ K &= E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 \\ p &= \gamma mv \end{aligned}$$

Enerji–momentum bağıntısı:

$$m^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2$$

Yararlı çıkarımlar:

$$pc = \beta E$$

$$v \ll c \quad \Rightarrow \quad K \simeq \frac{p^2}{2m}$$

$$E \gg mc^2 \quad \Rightarrow \quad E \simeq pc, \quad v \simeq c$$

Yüksek enerjilerde kütleli parçacığın enerjisi ve momentumu artmaya devam ederken hızı c 'ye yaklaşır ve giderek daha az değişir.

Hızlandırıcı Fiziğinde Birimler

Hızlandırıcı fiziğinde enerji, kütle ve momentum elektronvolt temelli birimlerle ifade edilir.

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$[E] = \text{eV}, \quad [m] = \text{eV}/c^2, \quad [p] = \text{eV}/c$$

Örnek: $m_p c^2 \simeq 938.27 \text{ MeV}, \quad m_e c^2 \simeq 0.511 \text{ MeV}$

Doğal birim gösterimi:

$$\hbar = c = 1 \qquad E^2 = p^2 + m^2, \qquad [E] = [p] = [m] = \text{eV}$$

$\hbar = c = 1$ seçildiğinde enerji, momentum ve kütle aynı enerji birimiyle ifade edilir; uzunluk ve zaman ise ters enerji boyutundadır.

$$[L] = [T] = \text{eV}^{-1}$$

Formüllerde doğal birimler; mıknatıs ve yörünge hesaplarında ise tesla, metre ve GeV/c birlikte kullanılacaktır.

Hızlandırıcı Fiziğinde Birimler

Derslerde kullanılacak başlıca fiziksel nicelikler ve birimleri aşağıda özetlenmiştir.

Nicelik	Birim	SI Karşılığı / Tanımı	Açıklama
Enerji (E)	eV (elektronvolt)	$1 \text{ eV} \simeq 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$	Bir temel yük büyüklüğündeki parçacığın 1 V potansiyel farkında kazandığı enerji
Kütle (m)	MeV/ c^2	$1 \text{ MeV}/c^2 \simeq 1.783 \times 10^{-30} \text{ kg}$	$E_0 = mc^2$
Momentum (p)	MeV/ c	$1 \text{ MeV}/c \simeq 5.344 \times 10^{-22} \text{ kg m/s}$	$E \gg mc^2$ bölgesinde $p \simeq E/c$
Manyetik Alan (B)	T (tesla)	$1 \text{ T} = 1 \text{ kg}/(\text{A s}^2)$	Manyetik alan şiddetini ifade eder
Manyetik Rijidite ($B\rho$)	T·m (tesla-metre)	$B\rho = p/ q $	Parçacığın bükülmeye karşı direncidir.
Yük (q)	e (temel yük)	$e \simeq 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$	Elektron için $q = -e$, proton için $q = +e$
Uzunluk (s, x, y)	m (metre)	Standart SI	Milimetre (mm) ve mikrometre (μm) yaygın olarak kullanılır
Açı	rad (radyan)	$1 \text{ rad} = 180/\pi$ derece	Küçük yörünge eğimleri çoğunlukla miliradyan (mrad) ile verilir

Referans Parçacık ve Referans Yörünge

Hızlandırıcılar, belirli bir yüke ve tasarım momentumuna sahip ideal bir parçacığın önceden belirlenen yörüngeyi izleyeceği biçimde tasarlanır.

Referans parçacık:

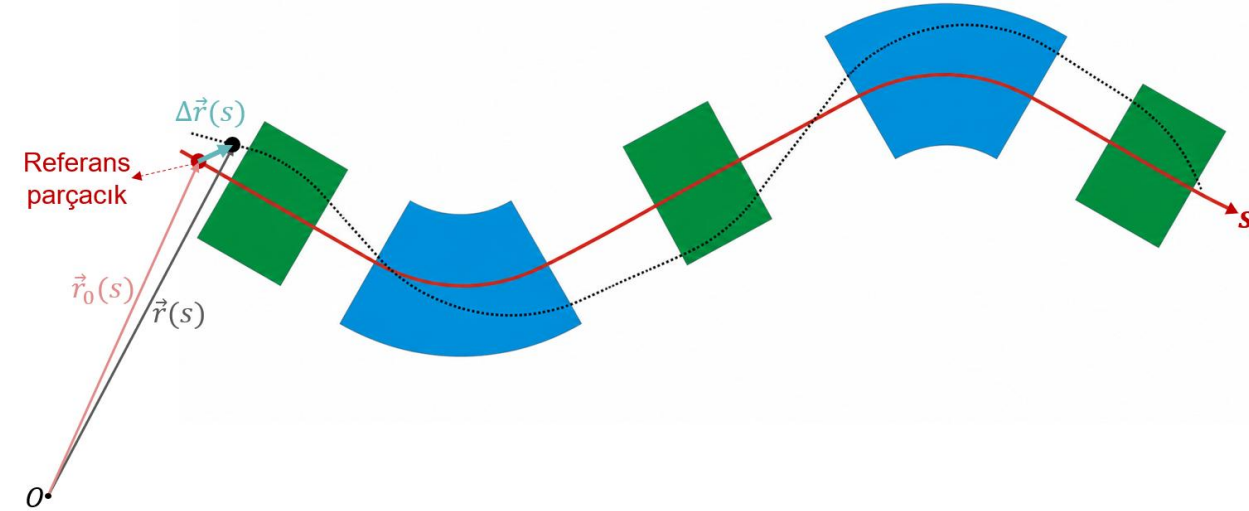
$$q = q_0, \quad p = p_0$$

Hızlandırıcının tasarımında esas alınan referans parçacık:

- tasarım momentumuna sahiptir,
- hızlandırıcı elemanlarının merkezlerinden geçer,
- referans yörüngeyi izler.

Referans yörünge, $\vec{r}_0(s)$:

Referans parçacığın hızlandırıcı boyunca izlemesi öngörülen ideal yoldur. s , bu yol boyunca ölçülen yay uzunluğunu gösterir.

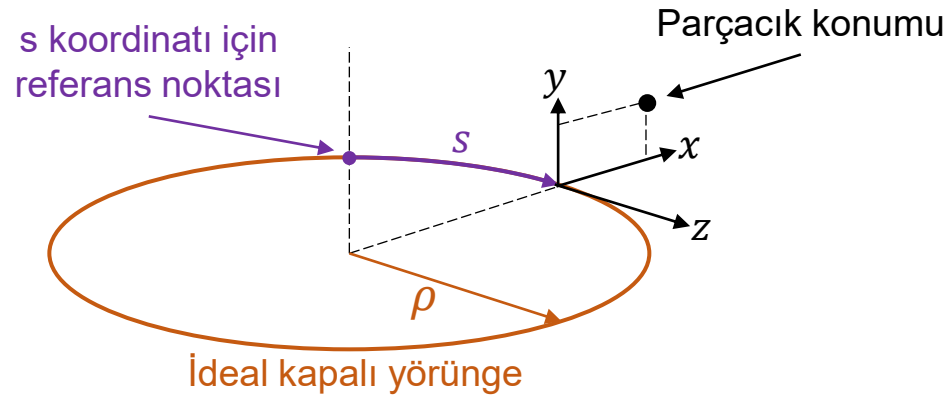


Parçacık optiğinde parçacıkların mutlak konumlarından çok, referans yörüngeden ne kadar ve hangi yönde saptıkları incelenir.

$$\vec{r}(s) = \vec{r}_0(s) + \Delta\vec{r}(s)$$

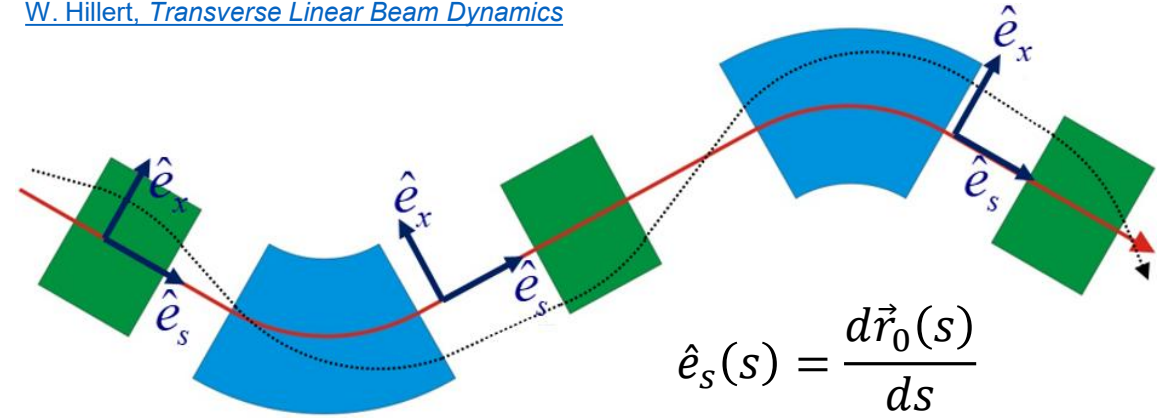
Frenet-Serret Koordinat Sistemi

Referans yörünge eğrisel olduğunda sabit laboratuvar eksenleri, parçacığın yörüngeye göre konumunu ifade etmek için uygun değildir. Bu nedenle referans yörüngeyle birlikte ilerleyen yerel bir koordinat sistemi kullanılır.



- x : yatay sapma
- y : dikey sapma
- s : İdeal yörünge boyunca katedilen yay uzunluğu

[W. Hillert, Transverse Linear Beam Dynamics](#)

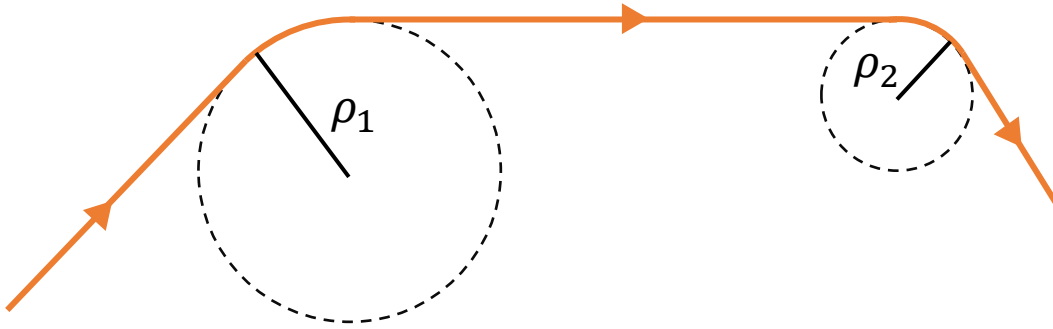


$$\vec{r}(s, x, y) = \vec{r}_0(s) + x\hat{e}_x(s) + y\hat{e}_y(s)$$

Bu tanımlar altında, parçacığın hareketi referans yörüngeyle birlikte ilerleyen x, y, s yerel koordinatlarına göre incelenebilmektedir.

Referans Yörüngenin Eğriliği

Referans yörüngenin teğet yönü s boyunca değişebilir. Bu değişim, yerel eğrilik yarıçapı $\rho(s)$ ve eğrilik $h(s)$ ile ifade edilir.



$$h(s) \equiv \left| \frac{d\hat{e}_s(s)}{ds} \right| = \frac{1}{\rho(s)}$$

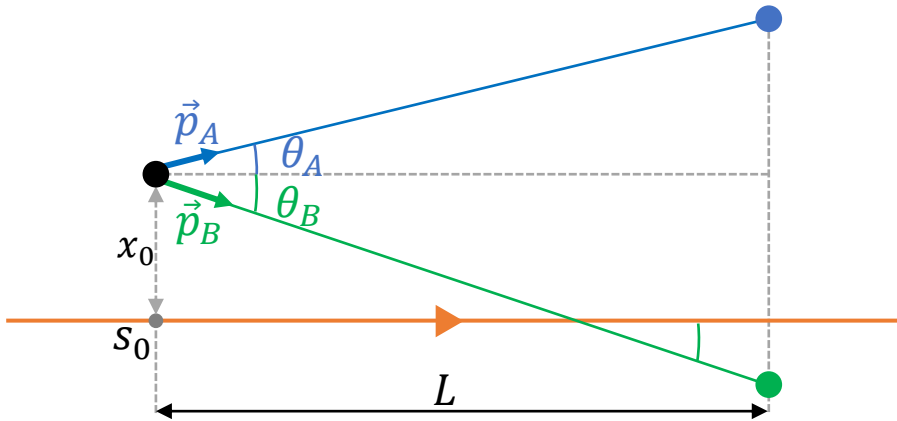
$$\rho(s) = \rho_0 \quad \Rightarrow \quad h(s) = \frac{1}{\rho_0} = \text{sabit} \quad (\text{dairesel})$$

$$\rho(s) \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad h(s) = 0 \quad (\text{doğrusal})$$

Eğrilik, referans yörüngenin teğet yönünün birim yay uzunluğu başına ne kadar değiştiğini gösterir.

Enine Konum ve Hareket Yönü

Aynı noktada bulunan iki parçacık, referans yörüngeye göre farklı yönlerde hareket edebilir. Bu nedenle yalnızca x konumunu bilmek, parçacığın sonraki hareketini belirlemek için yeterli değildir.



$$x_A(s_0) = x_B(s_0) = x_0$$

Başlangıç konumları aynı olmasına rağmen,

$$\vec{p}_A(s_0) \neq \vec{p}_B(s_0)$$

Hareket yönleri farklıdır.

$$\theta_A \neq \theta_B$$

$$x_A(s_0 + L) \neq x_B(s_0 + L)$$

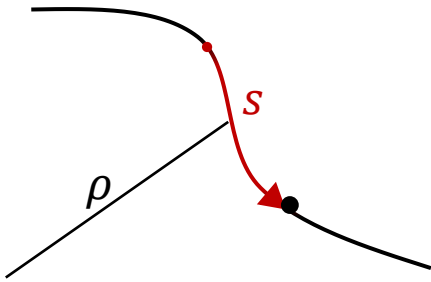
Bu nedenle, son konumlar da değişir.

Bir parçacığın enine hareketini belirlemek için iki bilgiye ihtiyaç vardır:

- Referans yörüngeden yatay sapması : x
- Referans yörüngeye göre hareket yönü : θ

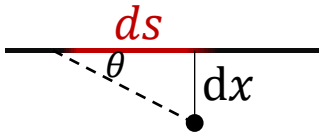
Enine Yörünge Eğimi

Parçacığın referans yörüngeye göre hareket yönü, enine konumun s boyunca değişimiyle tanımlanır.



$$x'(s) = \frac{dx(s)}{ds}, \quad \tan \theta = \frac{dx}{ds} \quad \Rightarrow \quad x' = \tan \theta$$

$$|\theta| \ll 1 \quad \Rightarrow \quad x' \approx \theta$$



$x' > 0$: x artar

$x' = 0$: parçacık referans yörüngeye yerel olarak paraleldir.

$x' < 0$: x azalır

x , parçacığın yatay konumunu; x' ise yatay yörünge eğimini belirtir. Enine hareketi belirlemek için x ve x' birlikte bilinmelidir.

Aynı tanımlar y (düşey konum) ve y' (düşey yörünge eğimi) için de geçerlidir.

Enine Durum Vektörü

Bir parçacığın enine durumu referans yörüngenin teğetine dik düzlemdeki $x(s)$ ve $y(s)$ ile $x'(s)$ ve $y'(s)$ yörünge eğimleriyle tanımlanır.

$$\vec{r}_\perp(s) = \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix}, \quad \vec{r}'_\perp(s) = \frac{d\vec{r}_\perp}{ds} = \begin{bmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_\perp(s) = \begin{bmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ y(s) \\ y'(s) \end{bmatrix}$$

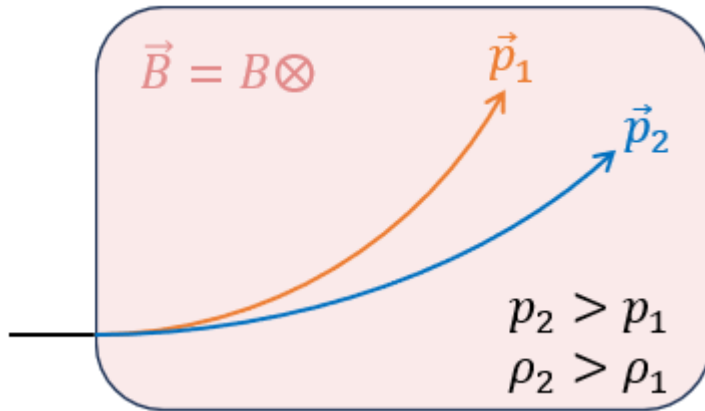
$$\mathbf{u}_x(s) = \begin{bmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_y(s) = \begin{bmatrix} y(s) \\ y'(s) \end{bmatrix}$$

Yatay ve düşey hareket birbirinden bağımsızsa iki düzlem ayrı ayrı incelenebilir. Bir düzlemdeki hareket diğerini etkiliyorsa dört bileşen birlikte ele alınır.

Enine parçacık dinamiği, $u_\perp$ durum vektörünün optik elemanlar boyunca nasıl değiştiğini inceler.

Manyetik Rijidite

Bir parçacığın manyetik alanda bükülmeye karşı gösterdiği direnç, manyetik rijidite (demet katılığı) ile ifade edilir.



$$p = |q|B\rho \quad \Rightarrow \quad B\rho = \frac{p}{|q|}$$

$q = e$ için:

$$B[\text{T}] \rho[\text{m}] = \frac{p[\text{GeV}/c]}{0.2998}$$

$$B\rho[\text{T m}] = 3.3356 p[\text{GeV}/c]$$

Manyetik rijitlik arttıkça parçacığı aynı yarıçapta bükmek için daha güçlü bir manyetik alan gerekir.

Demet Hattı ve Aktarım Matrisleri

Bir demet hattı; elektromanyetik alanların olmadığı boş bölümler, mıknatısların olduğu manyetik alan bölümleri ve hızlandırma amaçlı RF kavileri gibi ardışık elemanlardan oluşur. Doğrusal yaklaşımda her elemanın parçacık durumuna etkisi bir aktarım matrisiyle gösterilir.

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_0' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{u}_1 = M \mathbf{u}_0}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_0' \end{bmatrix}$$

Matris elemanları, optik elemanın parçacığın konumunu ve yörünge eğimini nasıl değiştirdiğini belirler.

$$\mathbf{u}_0 \xrightarrow{M_1} \mathbf{u}_1 \xrightarrow{M_2} \mathbf{u}_2 \xrightarrow{M_3} \dots \xrightarrow{M_N} \mathbf{u}_N$$

$$\boxed{\mathbf{u}_N = M_N M_{N-1} \dots M_2 M_1 \mathbf{u}_0}$$

Parçacığın ilk karşılaştığı elemanın matrisi çarpımın en sağında yer alır.

Aktarım Matrislerinin Temel Özellikleri

Matris formalizmini neden kullanıyoruz?

- Her elemanda hareket denklemlerini yeniden çözmek gerekmez.
- Parçacığın konumu ve yörünge eğimi elemandan elemana taşınır.
- Demet hattının toplam etkisi matrislerin sıralı çarpımıyla bulunur.
- Aynı yöntem yatay ve düşey hareket için uygulanır.

Liouville Teoremi

Radyasyon, saçılma, enerji kaybı ve parçacıklar arasındaki etkileşimler ihmal edildiğinde, Hamilton denklemleriyle betimlenen hareket faz uzayı hacmini korur.

Sabit referans momentumunda ve tek bir enine düzlemde bu korunum, (x, x') faz uzayı alanının korunması anlamına gelir. Aktarım matrisi şu koşulu sağlamalıdır:

$$M^T J M = J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu koşuldan

$$\boxed{\det(M) = 1}$$

sonucu elde edilir.

Aktarım matrisi parçacıkların konum ve yörünge eğimlerini değiştirebilir; ancak ideal ve kayıpsız taşımada (x, x') faz uzayı alanını değiştiremez.

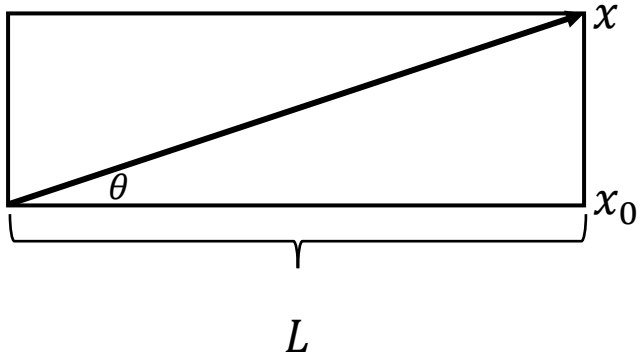
Sürüklenme (Drift) Bölgesinde Parçacık Hareketi

Sürüklenme bölgesi, elektrik ve manyetik alanların ideal olarak sıfır kabul edildiği serbest ilerleme bölgesidir.

$$\vec{E} = \vec{B} = 0$$

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

$$\vec{p} = \text{sabit} \quad \Rightarrow \quad x' = \text{sabit}$$



$$x = x_0 + L \tan(\theta) \approx x_0 + Lx'_0$$
$$x' = x'_0$$

Tek enine düzlem

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\text{drift}, x} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{bmatrix}$$

İki enine düzlem

$$\mathbf{M}_{\text{drift}} = \begin{bmatrix} 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

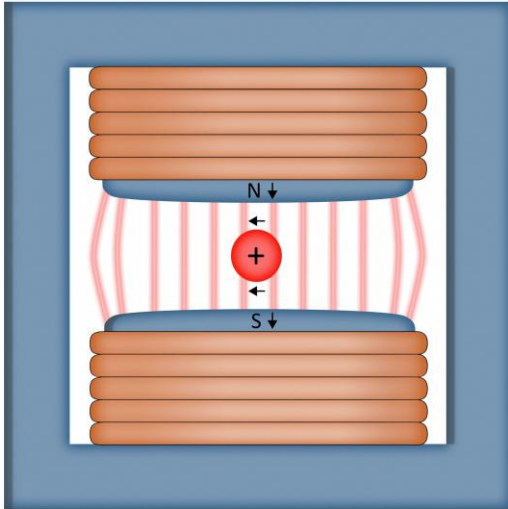
$$\begin{bmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix}$$

Sürüklenme bölgesinde parçacığın eğimi değişmez; ancak başlangıç eğimi sıfır değilse enine konumu değişir.

Çift Kutuplu (Dipol) Mıknatısı

Çift kutuplu mıknatıs, karşılıklı yerleştirilmiş bir kuzey ve bir güney kutbu arasında yaklaşık düzgün ve tek yönlü bir manyetik alan oluşturan hızlandırıcı elemanıdır.

Bu alandan geçen yüklü parçacığa hareket yönüne dik bir Lorentz kuvveti etki eder. Bu nedenle parçacığın momentumunun büyüklüğü değişmez; yalnızca yönü değişir.



[J. Pinson, The power of attraction: magnets in particle accelerators](#)

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Çift kutuplu mıknatısın temel görevi parçacık yörüngesini bükmeğdir.

Çift Kutuplu (Dipol) Miknatıs

Çift kutuplu miknatısın bükülme düzlemindeki lineerleştirilmiş hareket denklemi:

$$x''(s) + h^2 x(s) = 0$$

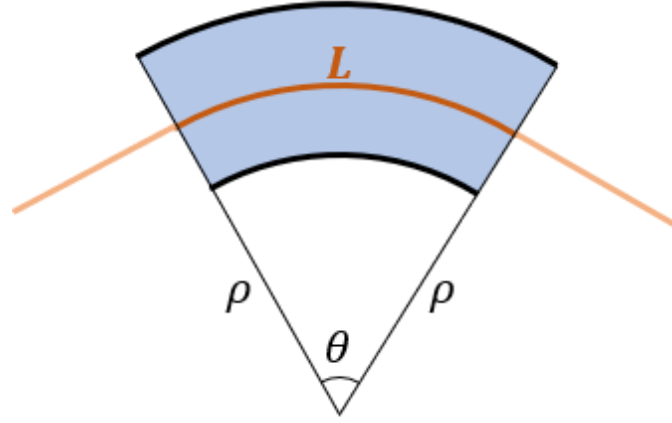
Bu denklem, $K_x = h^2 = 1/\rho^2$ için Hill denkleminin sabit katsayılı özel durumudur. $x(0) = x_0$ ve $x'(0) = x'_0$ başlangıç koşulları için:

$$x(L) = x_0 \cos \theta + \frac{x'_0}{h} \sin \theta$$

$$x'(L) = -h x_0 \sin \theta + x'_0 \cos \theta$$

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_{\text{çıkış}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \frac{1}{h} \sin \theta \\ -h \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_{\text{giriş}}$$

$$\mathbf{M}_{\text{dipol}, x} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



Çift kutuplu miknatıs geometrisi:

$$h = \frac{1}{\rho}, \quad \theta = \frac{L}{\rho} = hL$$

Çift Kutuplu (Dipol) Mıknatıs

Alan gradyanı ve kenar alanları ihmal edildiğinde çift kutuplu mıknatıs bir düzlemde bükme yaparken bükülmeye dik düzlemde sürüklenme bölgesi gibi davranır. Yatay düzlemde bükme yapılıyorsa düşey hareketin aktarım matrisi $M_{\text{dipol},y} = M_{\text{drift},y}$ olur.

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_{\text{çıkış}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & \frac{1}{h} \sin \theta \\ -h \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}}_{M_{\text{dipol},x}} \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_{\text{giriş}}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}_{\text{çıkış}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_{\text{dipol},y}} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}_{\text{giriş}}$$

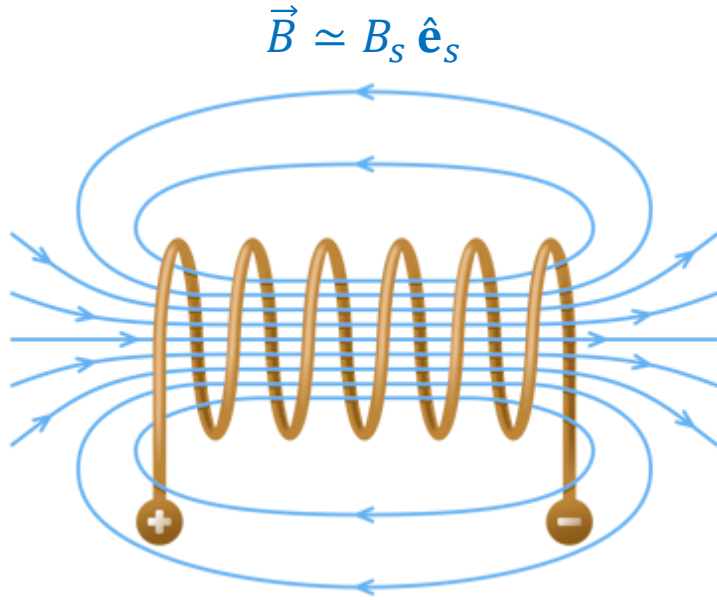
$$\begin{bmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{bmatrix}_{\text{çıkış}} = M_{\text{dipol}} \begin{bmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{bmatrix}_{\text{giriş}}$$

$$M_{\text{dipol}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Düşey düzlemde bükme yapan bir çift kutuplu mıknatıs için toplam matristeki yatay ve düşey düzlem blokları yer değiştirir.

Solenoid Mıknatısı

Solenoid, ortak bir eksen etrafına sarılmış akım taşıyan iletkenlerden oluşur. Mıknatısın merkez bölgesinde yaklaşık düzgün ve boyuna bir manyetik alan oluşur:



[JW. Pustjens, Solenoid Coil - Choosing AC or DC](#)

Eksen üzerinde ve eksene paralel hareket eden parçacık için:

$$\vec{v} = v_s \hat{e}_s \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} = 0$$

Enine hız bileşeni bulunan parçacığa ise manyetik kuvvet etki eder:

$$\vec{v}_\perp \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_B = q\vec{v}_\perp \times \vec{B} \neq 0$$

Bu nedenle parçacık, solenoid içinde sarmal bir yörünge izler. Sonlu uzunluktaki solenoid, giriş ve çıkış alanlarıyla birlikte aksenal simetrik bir odaklayıcı eleman olarak davranır.

Solenoid iki enine düzlemde birden odaklayıcı etki oluşturur; laboratuvar koordinatlarında x ve y hareketlerini birbirine bağlar.

Solenoidde hareket, Larmor açısıyla dönen koordinatlarda iki enine düzleme ayrılabilir:

$$\kappa = \frac{qB_s}{2p_0}, \quad \phi = \kappa L, \quad C = \cos \phi, \quad S = \sin \phi$$

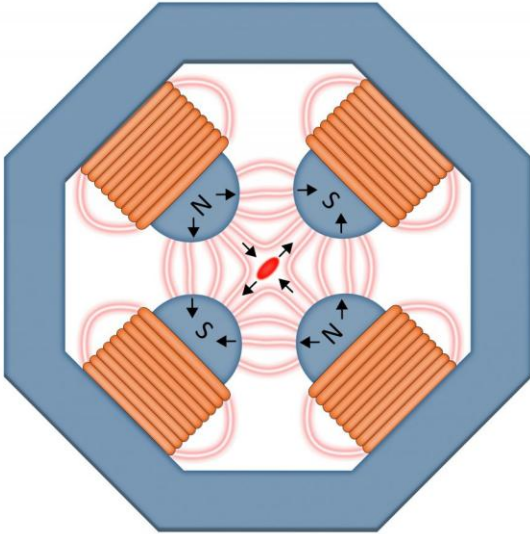
Burada κ solenoid gücünü (Larmor parametresi diye de anılır ve birimi m^{-1}), ϕ ise solenoid boyunca biriken Larmor dönüş açısını gösterir.

$$M_{\text{sol}} = \begin{bmatrix} C^2 & \frac{SC}{\kappa} & SC & \frac{S^2}{\kappa} \\ -\kappa SC & C^2 & -\kappa S^2 & SC \\ -SC & -\frac{S^2}{\kappa} & C^2 & \frac{SC}{\kappa} \\ \kappa S^2 & -SC & -\kappa SC & C^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{\perp, \text{çıkış}} = M_{\text{sol}} \mathbf{u}_{\perp, \text{giriş}}$$

Dört Kutuplu (Quadrupole) Mıknatıs

Dört kutuplu mıknatıs, çevresinde dönüşümlü olarak yerleştirilmiş iki kuzey ve iki güney kutbundan oluşur. Mıknatısın merkezinde alan sıfırdır; alanın büyüklüğü merkezden uzaklıkla doğrusal olarak artar.



[J. Pinson, The power of attraction: magnets in particle accelerators](#)

Seçilen kutup düzeni ve eksen yönleri için:

$$B_x = G \cdot y, \quad B_y = G \cdot x$$

$$G = \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial y}$$

- G : manyetik alan gradyanı, birimi T/m.
- $x = y = 0$ olan referans parçacığa enine kuvvet etki etmez.
- Referans yörüngeden sapmış parçacığın maruz kaldığı alan, sapmasıyla orantılıdır.

Dört Kutuplu (Quadrupole) Mıknatıs

Dört kutuplu mıknatıs gücü:

$$k = \frac{qG}{p_0}, \quad |k| = \frac{|G|}{B\rho}$$

k 'nın işareti, parçacığın yükünü ve mıknatısın kutup yönlenmesini içerir. Birimi m^{-2} 'dir.

Hareket denklemleri:

$$\begin{aligned} x''(s) + k x(s) &= 0 \\ y''(s) - k y(s) &= 0 \end{aligned}$$

$k > 0$ için:

- x düzlemindeki çözüm sinüs ve kosinüs,
 - y düzlemindeki çözüm hiperbolik sinüs ve kosinüs içerir.
- $k < 0$ olduğunda iki düzlemin rolleri yer değiştirir.

Aynı dört kutuplu mıknatıs, iki enine düzlemde zıt işaretli hareket denklemleri oluşturur. Bir eksende odaklama yaparken diğer eksende dağıtma yapar.

Dört Kutuplu (Quadrupole) Miknatıs

$k > 0$ için:

Yatay düzlem: odaklayıcı

$$M_{\text{quad},x} = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{k}L) & \frac{1}{\sqrt{k}}\sin(\sqrt{k}L) \\ -\sqrt{k}\sin(\sqrt{k}L) & \cos(\sqrt{k}L) \end{bmatrix}$$

Düşey düzlem: dağıtıcı

$$M_{\text{quad},y} = \begin{bmatrix} \cosh(\sqrt{k}L) & \frac{1}{\sqrt{k}}\sinh(\sqrt{k}L) \\ \sqrt{k}\sinh(\sqrt{k}L) & \cosh(\sqrt{k}L) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\text{quad}} = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{k}L) & \frac{1}{\sqrt{k}}\sin(\sqrt{k}L) & 0 & 0 \\ -\sqrt{k}\sin(\sqrt{k}L) & \cos(\sqrt{k}L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(\sqrt{k}L) & \frac{1}{\sqrt{k}}\sinh(\sqrt{k}L) \\ 0 & 0 & \sqrt{k}\sinh(\sqrt{k}L) & \cosh(\sqrt{k}L) \end{bmatrix}$$

Dört Kutuplu (Quadrupole) Mıknatıs

İnce mercek yaklaşımı: $\sqrt{k}L \ll 1$

Mıknatıs içindeki konum değişimi ihmal edilir; konuma bağlı eğim değişimi hesaba katılır:

$$\begin{aligned}x_{\text{çıkış}} &= x_{\text{giriş}}, & x'_{\text{çıkış}} &= x'_{\text{giriş}} - kLx_{\text{giriş}} \\y_{\text{çıkış}} &= y_{\text{giriş}}, & y'_{\text{çıkış}} &= y'_{\text{giriş}} + kLy_{\text{giriş}}\end{aligned}$$

$$M_{\text{quad, ince}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/f & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 1 \end{bmatrix} \quad f = \frac{1}{kL}$$

İnce mercek yaklaşımında dört kutuplu mıknatıs parçacığın konumunu değil, konumuna bağlı olarak yörünge eğimini değiştirir.

Periyodik Odaklamanın Gerekliiği

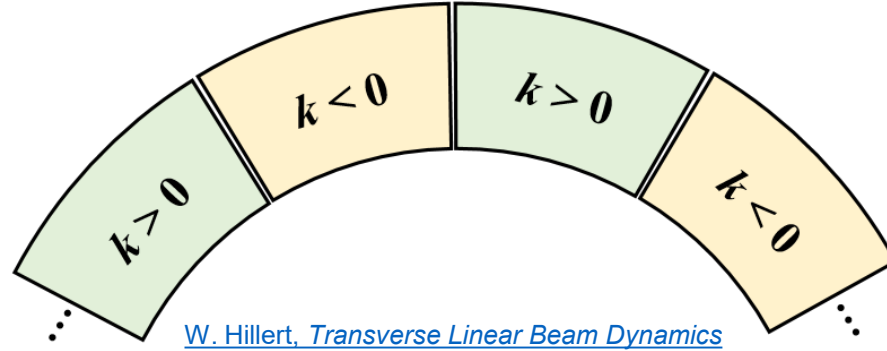
Uzun bir demet hattında tek bir mıknatısın oluşturduğu yerel odaklama, parçacığın enine hareketini hat boyunca sınırlı tutmaya yeterli değildir. Odaklama etkisinin hat boyunca düzenli olarak yinelenmesi gerekir.

Dört kutuplu mıknatısın iki kutup yönlenmesi farklı görevler üstlenir:

$$\begin{aligned} Q_F: & \quad x \text{ düzleminde odaklama,} \quad y \text{ düzleminde dağıtma} \\ Q_D: & \quad x \text{ düzleminde dağıtma,} \quad y \text{ düzleminde odaklama} \end{aligned}$$

Q_F ve Q_D mıknatısları, aralarında sürüklenme bölgeleri bulunacak şekilde art arda yerleştirilir. Parçacığın konumu ve yörünge eğimi her elemandan geçerken değiştiği için her mıknatıs, parçacığın farklı bir enine durumuna etki eder.

Hücrenin toplam etkisi, elemanların ayrı ayrı etkilerinin toplamıyla değil, aktarım matrislerinin sıralı çarpımıyla belirlenir. Uygun mıknatıs güçleri ve eleman aralıkları seçildiğinde bu toplam dönüşüm, her iki enine düzlemde de sınırlı ve salınımlı hareket oluşturabilir.



Q_F ve Q_D mıknatıslarının sürüklenme bölgeleriyle birlikte periyodik olarak yinelenmesi, FODO odaklama düzenini oluşturur.

FODO Hücresi

FODO örgüsü, odaklayıcı ve dağıtıcı dört kutuplu mıknatısların sürüklenme bölgeleriyle ayrılarak periyodik biçimde yinelendiği bir optik yapıdır:

$$\dots - F - O - D - O - F - O - D - O - \dots$$

Bir hücrenin başlangıç ve bitiş noktaları farklı konumlarda seçilebilir.

Odaklayıcı mıknatısın girişinden bir sonraki odaklayıcı mıknatısın girişine kadar:

$$\boxed{F \rightarrow O \rightarrow D \rightarrow O}$$

$$M_{\text{FODO}}^{(F \text{ girişi})} = M_O M_D M_O M_F$$

Odaklayıcı mıknatısların merkezleri arasında tanımlanan simetrik hücre:

$$\boxed{\frac{F}{2} \rightarrow O \rightarrow D \rightarrow O \rightarrow \frac{F}{2}}$$

$$M_{\text{FODO}}^{(F \text{ merkezi})} = M_{F/2} M_O M_D M_O M_{F/2}$$

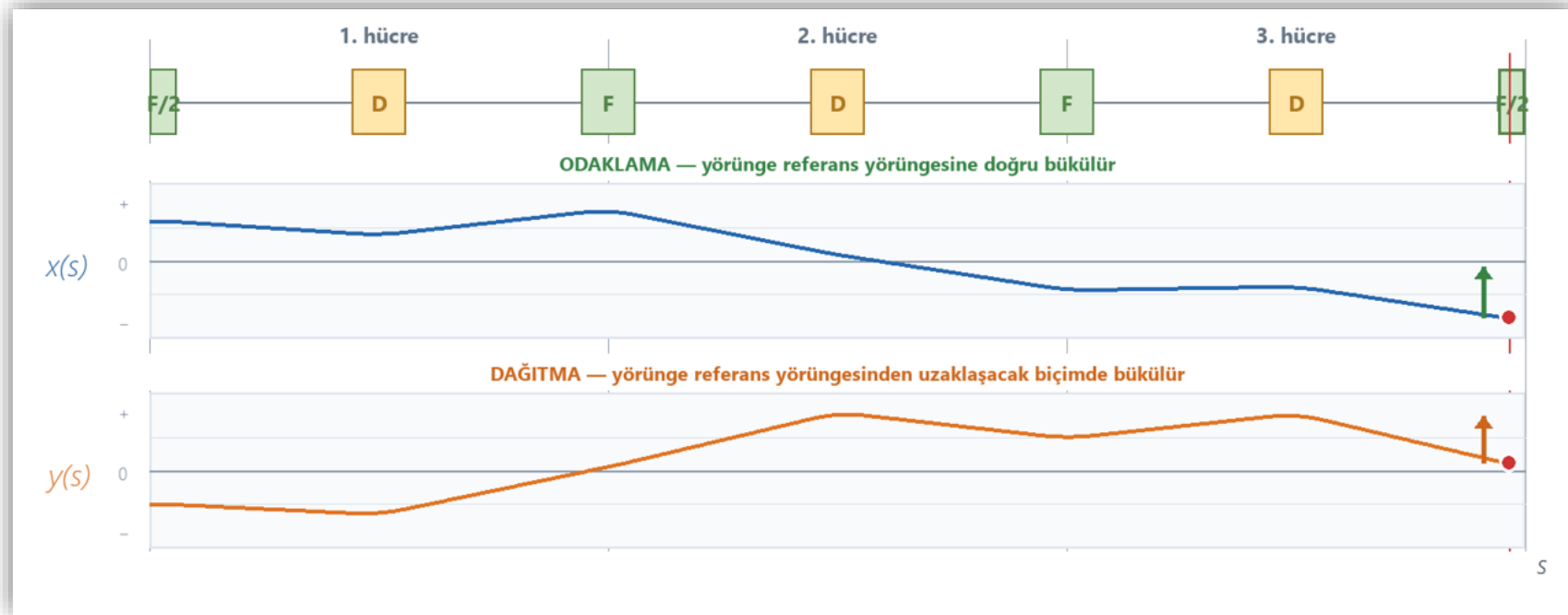
$M_{F/2}$: odaklayıcı mıknatısın yarısına ait aktarım matrisi

FODO Hücresi

FODO hücresinde yörünge eğriliğinin yönü, parçacığın geçtiği optik elemana ve incelenen enine düzleme bağlıdır:

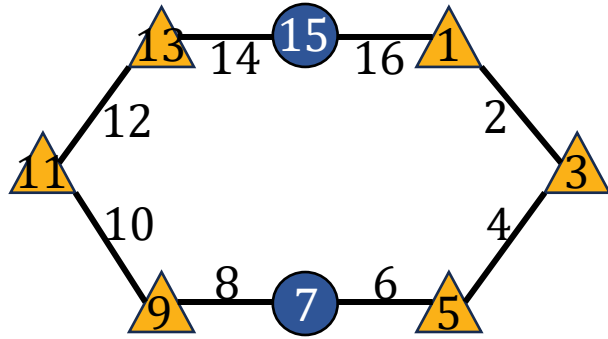
$$\begin{aligned} Q_F: \quad x'' &= -kx, & y'' &= +ky \\ Q_D: \quad x'' &= +kx, & y'' &= -ky \\ O: \quad x'' &= 0, & y'' &= 0 \end{aligned} \quad (k > 0)$$

$u = x$ veya y olmak üzere $-ku$ terimi yörüngeyi referans yörüngesine doğru, $+ku$ terimi ise referans yörüngesinden uzaklaşacak biçimde bükür.



Döngü Matrisi

Dairesel bir hızlandırıcıda parçacık, her turda aynı optik eleman dizisinden geçerek seçilen referans noktasına geri döner. Bir tam tur boyunca karşılaşılan elemanların toplam aktarım matrisine **döngü matrisi** denir.



$$M_{\text{rev}} = M_{16}M_{15} \cdots M_2M_1$$

Genel Tanım:

$$M_{\text{rev}} = M_N M_{N-1} \cdots M_2 M_1$$

Parçacığın aynı referans noktasındaki enine durumu, her turda aynı döngü matrisiyle taşınır:

$$\mathbf{u}_{n+1} = M_{\text{rev}} \mathbf{u}_n$$

Dolayısıyla n tur sonunda:

$$\mathbf{u}_n = M_{\text{rev}}^n \mathbf{u}_0$$

Aynı dönüşümün her turda yinelenmesi, parçacık yörüngesinin kararlılığını döngü matrisi üzerinden incelemeyi mümkün kılar.

Yörünge Kararlılığı

Bir parçacığın yörüngesi, döngü matrisi art arda uygulandığında enine durum vektörü sınırlı kalıyorsa kararlıdır:

$$\mathbf{u}_n = M_{\text{rev}}^n \mathbf{u}_0$$

Bir matrisin determinanı özdeğerlerinin çarpımına eşittir. Birbirinden ayrılmış tek bir enine düzlemde, ideal ve lineer döngü matrisi için:

$$\lambda_+ \lambda_- = \det(M_{\text{rev}}) = 1$$

Kararlı salınımlı harekette özdeğerler birim çember üzerindedir:

$$|\lambda_+| = |\lambda_-| = 1 \quad \lambda_{\pm} = e^{\pm i\mu}$$

Burada μ , bir turdaki faz ilerlemesidir.

$$\text{Tr}(M_{\text{rev}}) = \lambda_+ + \lambda_- = 2 \cos \mu$$

Kararlılık durumları:

- $|\text{Tr}(M_{\text{rev}})| < 2 \Rightarrow$ kararlı ve salınımlı hareket
- $|\text{Tr}(M_{\text{rev}})| > 2 \Rightarrow$ kararsız ve büyüyen hareket
- $|\text{Tr}(M_{\text{rev}})| = 2 \Rightarrow$ kararlılık sınırı

Döngü matrisinin izi, tekrarlanan dönüşümün sınırlı bir salınım mı yoksa büyüyen bir hareket mi oluşturduğunu belirler.

Kararlı ve Kararsız Yörünge

KARARLI HAREKET

$$|Tr(M_{rev})| = 1.29 < 2$$



$|x| = 2.30 \text{ mm}$ — parçacık açıklık içinde

tamamlanan tur: $n = 18$



(x, x') sınırlı kalır

KARARSIZ HAREKET

$$|Tr(M_{rev})| = 2.03 > 2$$



HALKA AÇIKLIĞI AŞILDI: $|x| = 3.56 \text{ mm}$

tamamlanan tur: $n = 18$



(x, x') turdan tura büyür

Kararlılık, parçacığın halkada dönmesi değil; aynı referans noktasındaki enine durumunun sınırlı kalmasıdır.

Enine sapmalar ve halka açıklığı, görünürlük amacıyla şematik olarak büyütülmüştür; çizim geometrik ölçekte değildir.

Tek Parçacıktan Demete

Tek parçacık hareketi, bir başlangıç durum vektörünün aktarım matrisiyle taşınmasıyla betimlenir:

$$\mathbf{u}_{\text{çıkış}} = M\mathbf{u}_{\text{giriş}}$$

Bir parçacık topluluğu, farklı başlangıç koşullarına sahip N durum vektöründen oluşur:

$$\mathcal{U}_{\text{giriş}} = \{\mathbf{u}_{1,\text{giriş}}, \mathbf{u}_{2,\text{giriş}}, \dots, \mathbf{u}_{N,\text{giriş}}\}$$

Lineer optik sistemde aynı aktarım matrisi topluluğun her elemanına uygulanır:

$$\mathbf{u}_{i,\text{çıkış}} = M\mathbf{u}_{i,\text{giriş}}, \quad i = 1, \dots, N$$

Demet dinamiği, aynı optik dönüşüm altında başlangıç koşulları dağılımının evrimini inceler.

